



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

~σελίδα 1 από 23 ~

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα, σύμφωνα με συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

- A4.**
- α. Σωστό
 - β. Σωστό
 - γ. Λάθος
 - δ. Λάθος
 - ε. Σωστό



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9, x \in \mathbb{R}$

- η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

από **Θ. Fermat** είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -6}$

Για $\alpha = -6$ είναι :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, x \in \mathbb{R}$

B2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	○	-	○	+
f	↗		↘		↗

1^{ος} τρόπος

Η f έχει το πολύ μία ρίζα σε κάθε διάστημα μονοτονίας της, άρα η $f(x) = 0$ έχει 3 το πολύ ρίζες στο \mathbb{R} .

- f συνεχής στα $[0, 1], [1, 3], [3, 4]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -3 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \\ f(3) = -3 < 0 \\ f(4) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \cdot f(1) < 0 \\ f(1) \cdot f(3) < 0 \\ f(3) \cdot f(4) < 0 \end{cases}$$

από **Θ. Bolzano** η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1), (1, 3)$ και $(3, 4)$.

Επομένως $\boxed{\eta f(x) = 0 \text{ έχει ακριβώς } 3 \text{ θετικές πραγματικές ρίζες.}}$

2^{ος} τρόπος

$\Delta_1 = (-\infty, 1]$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \bullet f(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = (-\infty, 1]$$

$0 \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ_1 ,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 > 0$

• f συνεχής στο $[0, 1]$

• $f(0) = -3 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$, άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$

από **Θ. Bolzano** η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1) \subseteq \Delta_1$, άρα $x_1 > 0$.

$\Delta_2 = (1, 3)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = (-3, 1)$$

$0 \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 ,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

$\Delta_3 = [3, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_3

• $f(3) = -3$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = [-3, +\infty)$$

$0 \in f(\Delta_3)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ_3 ,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_3 \in \Delta_3$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$.

Επομένως **η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές πραγματικές ρίζες.**



B3. $f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12, x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
f(x)	↪		↻

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$, ενώ η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.

$f(2) = -1$, άρα η C_f έχει σημείο καμπής το $M(2, -1)$.

B4. Είναι $g(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$ και

$$g'(x) = f'(x) + 1, x \in \mathbb{R}.$$

1^{ος} τρόπος

- ε_1 : η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$

$$\varepsilon_1 : y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } y = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi),$$

άρα η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$

- ε_2 : η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$

$$\varepsilon_2 : y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_2 : y - [f(\xi) + \xi] = [f'(\xi) + 1] \cdot (x - \xi)$$

Θα δείξουμε ότι $\Gamma \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$$f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) - [f(\xi) + \xi] = [f'(\xi) + 1] \cdot (0 - \xi) \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) - \xi = -\xi \cdot f'(\xi) - \xi \Leftrightarrow$$

$0 = 0$ που ισχύει, επομένως

οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$

αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$ του άξονα $y'y$.



2^{ος} τρόπος

- ε_1 : η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$

$$\varepsilon_1 : y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } y = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi),$$

άρα η ε_1 τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$

- ε_2 : η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$

$$\varepsilon_2 : y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow \varepsilon_2 : y - [f(\xi) + \xi] = [f'(\xi) + 1] \cdot (x - \xi)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } y = -\xi \cdot [f'(\xi) + 1] + [f(\xi) + \xi] = -\xi \cdot f'(\xi) - \xi + f(\xi) + \xi$$

άρα και η ε_2 τέμνει τον $y'y$ επίσης στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$.

Οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$ του άξονα $y'y$.

3^{ος} τρόπος

- ε_1 : η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$

$$\varepsilon_1 : y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1 : y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$$

- ε_2 : η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$

$$\varepsilon_2 : y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_2 : y - [f(\xi) + \xi] = [f'(\xi) + 1] \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_2 : y = f'(\xi) \cdot x + x - \xi \cdot f'(\xi) - \xi + f(\xi) + \xi \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_2 : y = f'(\xi) \cdot x + x - \xi \cdot f'(\xi) + f(\xi)$$

Λύνουμε το σύστημα των ε_1 και ε_2

$$f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi) = f'(\xi) \cdot x + x - \xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$ του άξονα $y'y$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$

πρέπει και αρκεί $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0 \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 \\ &\bullet f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0.$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

πρέπει και αρκεί $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) \\ &\quad = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1 \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \\ &\quad = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad \begin{matrix} 1 + \frac{1}{x} = u \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty \end{matrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$,

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.



Γ2. • κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών,

η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άρρητη και

η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και

η C_f **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.**

• πλάγιες / οριζόντιες

▷ στο $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$, διότι

$$\left. \begin{aligned} |e^x \cdot \eta\mu x| &\leq |e^x| = e^x \Rightarrow -e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

άρα η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 0$ ($x'x$).**

▷ ΣΤΟ $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} + x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

άρα η C_f **έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$.**



Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$.

$$g(x) = e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}, \quad x \in [-\pi, 0]$$

- g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cdot 0 + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$ και

$$g(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = 1 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

από **Θ. Bolzano** υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, άρα

η C_f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Παρατήρηση : Η ρίζα είναι και μοναδική στο διάστημα $(-\pi, 0)$

$$g'(x) = \left(e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2} \right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1, \quad x \in [-\pi, 0]$$

$$g''(x) = (e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1)' = 2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [-\pi, 0]$$

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0
$g''(x)$		\circ	
$g'(x)$			

$$-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \stackrel{g' \downarrow}{\Rightarrow} g'(x) \leq g'(-\pi) \Leftrightarrow g'(x) \leq -e^\pi - 1 \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \stackrel{g' \uparrow}{\Rightarrow} g'(x) < g'(0) \Rightarrow g'(x) < 0$$

Είναι $g'(x) < 0$, για κάθε $x \in [-\pi, 0)$,

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, 0)$,

επομένως η ρίζα είναι μοναδική.





Γ4. $M(x, y)$, με $y = \sqrt{x^2 + x}$, $x \geq 0$

Είναι $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $t \geq 0$

Παραγωγίζοντας για $t > 0$ έχουμε :

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' \Leftrightarrow y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}} \Leftrightarrow$$

$$y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot x'(t), t > 0$$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ ισχύει ότι :

ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι ίσος

με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του M ,

δηλαδή ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0) > 0$.

$$\cancel{y'(t_0)} = \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \cdot \cancel{x'(t_0)} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2 \cdot x(t_0) + 1 \Rightarrow$$

$$4\left(\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}\right)^2 = (2 \cdot x(t_0) + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} = \cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} + 1 \Leftrightarrow$$

$$0 = 1 \text{ (άτοπο)}$$

επομένως δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.





ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$

$$(x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x}, \quad x > 0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων, άρα

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}} \right)' = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} \\ &= \frac{\left[f(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} \right] \cdot x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{x^{\ln x}} = \frac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{x^{\ln x}} \\ &= \frac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{x \cdot x^{\ln x}} = \frac{xf(x) - xf(x)}{x \cdot x^{\ln x}} = \frac{0}{x \cdot x^{\ln x}} = 0, \text{ για κάθε } x > 0 \end{aligned}$$

άρα από **συνέπειες Θ.Μ.Τ.** η g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. 1^{ος} τρόπος

- i) • Για $x = 1$ είναι $1 \cdot f(1) = 2 \cdot F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$ (1)
- Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία

$$(\varepsilon) : y = 2x, \text{ άρα } f'(1) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2 \quad (2)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \quad (3)$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \stackrel{(2)}{=} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{(3)}{=} 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2 \quad (4)$$



ii) Είναι $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \stackrel{0 < x \neq 1}{\Rightarrow} \frac{2F(x)}{x} = \frac{f(x)}{\ln x}$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{F \text{ συνεχής}}{\Leftrightarrow} \stackrel{(4)}{2F(1) = 2} \Leftrightarrow \mathbf{F(1) = 1}$$

Είναι $g(1) = \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = \frac{1}{1^0} = 1$, άρα είναι $g(x) = 1$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως $\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1, x > 0 \Leftrightarrow \mathbf{F(x) = x^{\ln x}, x > 0}$.

Δ2. 2^{ος} τρόπος

- i) • Για $x = 1$ είναι $1 \cdot f(1) = 2 \cdot F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x$, άρα $f'(1) = 2$
- Η σχέση $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x, x > 0$ αποτελείται από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x) + x \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot \ln x + \frac{2F(x)}{x}, x > 0$$

$$\text{και για } x = 1 \text{ παίρνουμε } f(1) + f'(1) = 2f(1) \cdot \ln 1 + 2F(1) \Leftrightarrow 0 + 2 = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow 2F(1) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{F(1) = 1}$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} \stackrel{F \text{ συνεχής}}{=} \frac{2F(1)}{1} \stackrel{F(1)=1}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$$

ii) Δείξαμε ότι $\mathbf{F(1) = 1}$ στο ερώτημα Δ2.i

Είναι $g(1) = \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = \frac{1}{1^0} = 1$, άρα είναι $g(x) = 1$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως $\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1, x > 0 \Leftrightarrow \mathbf{F(x) = x^{\ln x}, x > 0}$.

Δ2. 3^{ος} τρόπος

- i) • Για $x = 1$ είναι $1 \cdot f(1) = 2 \cdot F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x$, άρα $f'(1) = 2$
 - Η σχέση $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x, x > 0$ αποτελείται από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x) + x \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot \ln x + \frac{2F(x)}{x}, x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 2xf(x) \cdot \ln x + 2F(x), x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 \cdot f'(x) = 2xf(x) \cdot \ln x - x \cdot f(x) + 2F(x), x > 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{xf(x) \cdot (2\ln x - 1) + 2F(x)}{x^2}, x > 0$$

άρα η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{f' \text{ συνεχής}}{=} \frac{f'(1)}{1} \stackrel{f'(1)=2}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$$

ii) $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x, x > 0 \Leftrightarrow F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2 \ln x}, 0 < x \neq 1$

$$F(1) \stackrel{F \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Είναι $g(1) = \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = \frac{1}{1^0} = 1$, άρα είναι $g(x) = 1$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως $\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1, x > 0 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$.



Δ3. $F'(x) = (x^{\ln x})' = \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x}, x > 0$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x} = 0 \begin{matrix} x^{\ln x} > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x} > 0 \begin{matrix} x^{\ln x} > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	+∞
F'(x)		-	+
F		↘	↗

Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$
ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η εξίσωση γράφεται $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2, x > 0$ (5)

1^{ος} τρόπος

- προφανής ρίζα το $x_0 = 1$, αφού $F(1) - F(1) = 0$.

- Για $x \in (0, 1)$ είναι :

$$0 < x^2 < x < 1 \xrightarrow{F \downarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2,$$

άρα η (5) είναι αδύνατη στο $(0, 1)$.

- Για $x \in (1, +\infty)$ είναι :

$$x^2 > x > 1 \xrightarrow{F \uparrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2,$$

άρα η (5) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.

Επομένως η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 1$.



2^{ος} τρόπος

Για $x > 0$ ισχύει $F(x) = e^{\ln x^2}$ και

$$F(x^2) = e^{(\ln x^2)^2} = e^{(2 \ln x)^2} = e^{4 \ln^2 x} = (e^{\ln^2 x})^4 = F^4(x)$$

Η εξίσωση γίνεται :

$$F^4(x) = F(x) - (x - 1)^2, \quad x > 0 \Leftrightarrow$$

$$F^4(x) - F(x) + (x - 1)^2 = 0, \quad x > 0 \Leftrightarrow$$

$$F(x) \cdot [F^3(x) - 1] + (x - 1)^2 = 0, \quad x > 0$$

Η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ την τιμή $F(1) = 1$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$F(x) \geq 1 \Leftrightarrow F^3(x) \geq 1 \Leftrightarrow F^3(x) - 1 \geq 0 \text{ και το "=" ισχύει μόνο για } x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} F^3(x) - 1 \geq 0 \\ F(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) \cdot [F^3(x) - 1] \geq 0 \text{ και το "=" ισχύει μόνο για } x = 1 \quad (1)$$

Ισχύει $(x - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) \cdot [F^3(x) - 1] \geq 0 \\ (x - 1)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} F(x) \cdot [F^3(x) - 1] + (x - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επομένως η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2$
έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 1$.

3^{ος} τρόπος

Για $x > 0$ ισχύει $F(x) = e^{\ln x^2}$ και

$$F(x^2) = e^{(\ln x^2)^2} = e^{(2 \ln x)^2} = e^{4 \ln^2 x} = (e^{\ln^2 x})^4 = F^4(x)$$

Η εξίσωση γίνεται :

$$F^4(x) = F(x) - (x-1)^2, \quad x > 0 \Leftrightarrow F^4(x) - F(x) + (x-1)^2 = 0, \quad x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = F^4(x) - F(x) + (x-1)^2, \quad x > 0$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 4F^3(x) \cdot F'(x) - F'(x) + 2(x-1) \\ &= 4F^3(x) \cdot f(x) - f(x) + 2(x-1) \\ &= [4F^3(x) - 1] \cdot f(x) + 2(x-1) \end{aligned}$$

Για κάθε $0 < x < 1$ ισχύουν :

- $F(x) > F(1) \Leftrightarrow F(x) > 1 \Leftrightarrow F^3(x) > 1 \Leftrightarrow 4F^3(x) > 4 \Leftrightarrow 4F^3(x) - 1 > 3 > 0$
- $f(x) < 0$
- $2(x-1) < 0$

άρα $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$

Για κάθε $x > 1$ ισχύουν :

- $F(x) > F(1) \Leftrightarrow F(x) > 1 \Leftrightarrow F^3(x) > 1 \Leftrightarrow 4F^3(x) > 4 \Leftrightarrow 4F^3(x) - 1 > 3 > 0$
- $f(x) > 0$
- $2(x-1) > 0$

άρα $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, άρα η φ είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Η συνεχής φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x = 1$ την τιμή $\varphi(1) = 0$

Επομένως η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 1$.

4^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γίνεται : $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2, x > 0$

- προφανής ρίζα το $x_0 = 1$, αφού $F(1) - F(1) = 0$.

- $0 < x^2 < x < 1$

▷ η F είναι συνεχής στο $[x^2, x]$

▷ η F είναι παραγωγίσιμη στο (x^2, x)

από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει $\xi_1 \in (x^2, x) : F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(x^2)}{x - x^2}$

$$\xi_1 < 1 \xrightarrow[\text{στο } (0, 1)]{F \downarrow} F'(\xi_1) < 0 \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(x^2)}{x - x^2} < 0 \xleftrightarrow{x - x^2 > 0} \Leftrightarrow$$

$$F(x) - F(x^2) < 0 \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2$$

δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, 1)$.

- $1 < x < x^2$

▷ η F είναι συνεχής στο $[x, x^2]$

▷ η F είναι παραγωγίσιμη στο (x, x^2)

από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει $\xi_2 \in (x, x^2) : F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$

$$\xi_2 > 1 \xrightarrow[\text{στο } (1, +\infty)]{F \uparrow} F'(\xi_2) > 0 \Leftrightarrow \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} > 0 \xleftrightarrow{x^2 - x > 0} \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

$$\text{άρα } F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2$$

δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.

Επομένως η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$

έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 1$.



Δ4. $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $E = \int_1^e F(x) dx$.

1^{ος} τρόπος

Είναι $e^u \geq u + 1$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$
άρα για $u = \ln^2 x$ έχουμε :

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$, για κάθε $x > 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$

Επομένως $\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow E > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$ (6)

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx &= \int_1^e 1 dx + \int_1^e \ln^2 x dx \\ &= [x]_1^e + \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx \\ &= e - 1 + [x \cdot \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln^2 x)' dx \\ &= e - 1 + e - 0 - \int_1^e x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 2e - 1 - \int_1^e 2 \ln x dx \\ &= 2e - 1 - \int_1^e (2x)' \cdot \ln x dx \\ &= 2e - 1 - \left([2x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e 2x \cdot (\ln x)' dx \right) \\ &= 2e - 1 - \left(2e - 0 - \int_1^e 2 dx \right) \\ &= \cancel{2e} - 1 - \cancel{2e} + [2x]_1^e \\ &= -1 + 2e - 2 \end{aligned}$$

άρα $\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = 2e - 3$ (7)

Από (6) και (7) έχουμε **$E > 2e - 3$** .



2^{ος} τρόπος

$$E = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx \longrightarrow \begin{array}{|l|} \hline \text{θέτουμε } \ln x = u \\ \hline \end{array}$$

$$E = \int_0^1 e^{u^2} \cdot e^u du \longleftarrow \begin{array}{|l|} \hline \text{είναι } x = e^u \text{ και } dx = e^u du \\ \hline \end{array}$$

x	1	e
u	0	1

$e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα
 $e^{u^2} \geq u^2 + 1$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $u = 0$, άρα
 $e^{u^2} \cdot e^u \geq (u^2 + 1) \cdot e^u$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $u = 0$, άρα
 Επομένως $\int_0^1 e^{u^2} \cdot e^u du > \int_0^1 (u^2 + 1) \cdot e^u du \Rightarrow$
 $E > \int_0^1 (u^2 + 1) \cdot e^u du$ (8)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u^2 + 1) \cdot e^u du &= \int_0^1 (u^2 + 1) \cdot (e^u)' du \\ &= [(u^2 + 1) \cdot e^u]_0^1 - \int_1^e (u^2 + 1)' \cdot e^u du \\ &= 2e - 1 - \int_0^1 2u \cdot e^u du \\ &= 2e - 1 - \int_0^1 2u \cdot (e^u)' du \\ &= 2e - 1 - \left([2u \cdot e^u]_0^1 - \int_1^e (2u)' \cdot e^u du \right) \\ &= 2e - 1 - \left(2e - \int_1^e 2e^u du \right) \\ &= \cancel{2e} - 1 - \cancel{2e} + [2e^u]_0^1 \\ &= -1 + 2e - 2 \end{aligned}$$

άρα $\int_0^1 (u^2 + 1) \cdot e^u du = 2e - 3$ (9)

Από (8) και (9) έχουμε **$E > 2e - 3$** .

3^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned}
 F''(x) &= \left(\frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x} \right)' = \frac{(x^{\ln x} \cdot 2 \ln x)' \cdot x - x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot (x)'}{x^2} \\
 &= \frac{[(x^{\ln x})' \cdot 2 \ln x + x^{\ln x} \cdot (2 \ln x)'] \cdot x - x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{\left(x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} \cdot 2 \ln x + x^{\ln x} \cdot \frac{2}{x} \right) \cdot x - x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot 2 \ln x + x^{\ln x} \cdot 2 - x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{x^{\ln x} \cdot (4 \ln^2 x - 2 \ln x + 2)}{x^2} > 0,
 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $4\omega^2 - 2\omega + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$ και είναι θετικό για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$.

άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

$$\varepsilon_1 : y - F(1) = F'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon_1 : y = 1$$

$$\varepsilon_2 : y - F(e) = F'(e)(x - e) \Leftrightarrow \varepsilon_2 : y = 2x - e$$

Η C_F βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες της ε_1 και ε_2 με εξαίρεση τα σημεία επαφής $A(1, 0)$ και $E(e, e)$

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της ε_2 με την ε_1 και τον άξονα x ' x .

$$\triangleright y = 2x - e \stackrel{y=1}{\Rightarrow} 1 = 2x - e \Leftrightarrow 2x = e + 1 \Leftrightarrow x = \frac{e + 1}{2}$$

άρα οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $Z\left(\frac{e + 1}{2}, 1\right)$

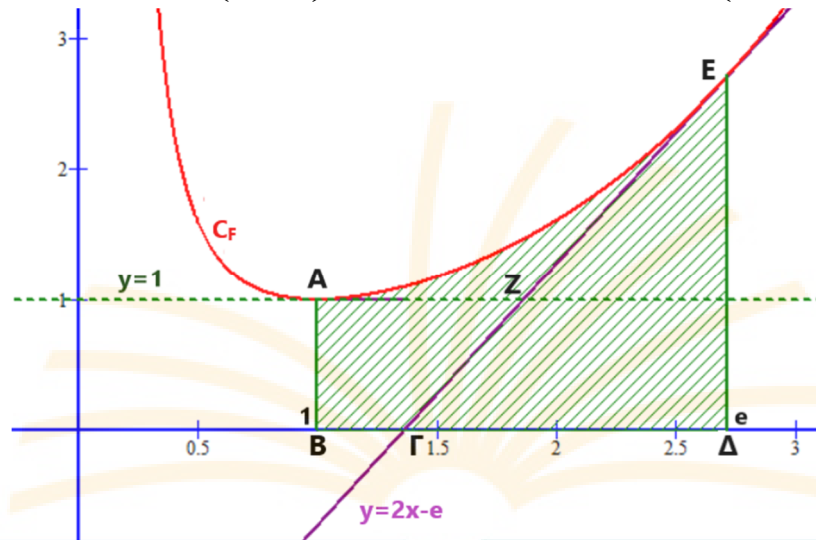
$$\triangleright y = 2x - e \stackrel{y=0}{\Rightarrow} 0 = 2x - e \Leftrightarrow 2x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

άρα οι ε_1 και x ' x τέμνονται στο σημείο $\Gamma\left(\frac{e}{2}, 0\right)$



Κάνουμε ένα πρόχειρο σχήμα

$$A(1, 1), B(1, 0), \Gamma\left(\frac{e}{2}, 0\right), \Delta(e, 0), E(e, e), Z\left(\frac{e+1}{2}, 1\right)$$



$$E_{\text{γραμ}} > (AB\Delta EZ) \Leftrightarrow E_{\text{γραμ}} > (AB\Gamma Z) + (\Gamma\Delta E)$$

$$(AB\Gamma Z) = \frac{AZ + B\Gamma}{2} \cdot AB = \frac{\left(\frac{e+1}{2} - 1\right) + \left(\frac{e}{2} - 1\right)}{2} \cdot 1 = \frac{2e-3}{2} = \frac{2e-3}{4}$$

$$(\Gamma\Delta E) = \frac{\Gamma\Delta \cdot E\Delta}{2} = \frac{\left(e - \frac{e}{2}\right) \cdot e}{2} = \frac{\frac{e}{2} \cdot e}{2} = \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4}$$

$$(AB\Gamma Z) + (\Gamma\Delta E) = \frac{2e-3}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{e^2 + 2e - 3}{4}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{e^2 + 2e - 3}{4} > 2e - 3 \Leftrightarrow e^2 + 2e - 3 > 8e - 12 \Leftrightarrow$
 $e^2 - 6e + 9 > 0 \Leftrightarrow (e - 3)^2 > 0$ που ισχύει διότι $e \approx 2,71$

Επομένως είναι $E > \frac{e^2 + 2e - 3}{4} > 2e - 3$, άρα $E > 2e - 3$.





ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ

Με αφορμή το Θέμα Β, αν γνωρίζουμε ότι η μια ρίζα της εξίσωσης

$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$ είναι η $x_1 = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$ να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της.



1	-6	9	-3	$2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$
↓	$2+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$	$4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}-8$	3	
1	$-4+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$	$4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}+1$	0	

Η εξίσωση γίνεται : $(x - 2 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9})\left[x^2 + (-4+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9})x + (4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}+1)\right] \Leftrightarrow$

$x - 2 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} = 0$ ή $x^2 + (-4+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9})x + (4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}+1) = 0$

• $x - 2 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$

• $x^2 + (-4+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9})x + (4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}+1) = 0$

$\Delta = (-4+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9})^2 - 4(4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}+1)$

$= 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9} - 16\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} + 16 - 16\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9} + 16\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} - 4$

$= 12 - 12\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9} = 12\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}\right) = 12\eta\mu^2\frac{\pi}{9}$

$x_{2,3} = \frac{4 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \pm \sqrt{12\eta\mu^2\frac{\pi}{9}}}{2} = \frac{4 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \pm 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9}}{2} = 2 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \pm \sqrt{3} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9}$

Άρα $x_2 = 2 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} + \sqrt{3} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9}$ και $x_3 = 2 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} - \sqrt{3} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9}$





ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ

Με αφορμή το Θέμα Β να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$.



Θέτουμε $x = \omega + 2$ και η εξίσωση γίνεται : $(\omega + 2)^3 - 6(\omega + 2)^2 + 9(\omega + 2) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\omega^3 + 6\omega^2 + 12\omega + 8 - 6(\omega^2 - 4\omega + 4) + 9\omega + 18 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^3 + 6\omega^2 + 12\omega + 8 - 6\omega^2 + 24\omega - 24 + 9\omega + 15 = 0 \Leftrightarrow \omega^3 - 3\omega - 1 = 0$$

Θέτουμε $\omega = y + \frac{1}{y}$ και η εξίσωση γίνεται :

$$\left(y + \frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(y + \frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 3y + \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} - 3y - \frac{3}{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} - 1 = 0 \Leftrightarrow y^6 - y^3 + 1 = 0$$

Θέτουμε $y^3 = z$ και η εξίσωση γίνεται : $z^2 - z + 1 = 0$

η οποία έχει $\Delta = -3$ και ρίζες $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \text{συν} \frac{\pi}{3} \pm i \cdot \eta\mu \frac{\pi}{3}$

▷ Για $z = \text{συν} \frac{\pi}{3} + i \cdot \eta\mu \frac{\pi}{3} \stackrel{z=y^3}{\Rightarrow} y^3 = \text{συν} \frac{\pi}{3} + i \cdot \eta\mu \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$$y = \text{συν} \frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{3} + i \cdot \eta\mu \frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{3} \quad \text{ή} \quad y = \text{συν} \frac{6k\pi + \pi}{9} + i \cdot \eta\mu \frac{6k\pi + \pi}{9}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$\omega = y + \frac{1}{y} = y + \frac{\bar{y}}{y \cdot \bar{y}} = y + \frac{\bar{y}}{|y|^2} = y + \frac{\bar{y}}{1^2} = y + \bar{y} = 2 \cdot \text{Re}(y)$$

• Για $k = 0$: $y = \text{συν} \frac{\pi}{9} + i \cdot \eta\mu \frac{\pi}{9} \stackrel{\omega=2 \cdot \text{Re}(y)}{\Rightarrow} \omega = 2 \text{συν} \frac{\pi}{9} \stackrel{x=\omega+2}{\Rightarrow} \boxed{x = 2 + 2 \text{συν} \frac{\pi}{9}}$

• Για $k = 1$: $y = \text{συν} \frac{7\pi}{9} + i \cdot \eta\mu \frac{7\pi}{9} \stackrel{\omega=2 \cdot \text{Re}(y)}{\Rightarrow} \omega = 2 \text{συν} \frac{7\pi}{9} \stackrel{x=\omega+2}{\Rightarrow} \boxed{x = 2 + 2 \text{συν} \frac{7\pi}{9}}$

• Για $k = 2$: $y = \text{συν} \frac{13\pi}{9} + i \cdot \eta\mu \frac{13\pi}{9} \stackrel{\omega=2 \cdot \text{Re}(y)}{\Rightarrow} \omega = 2 \text{συν} \frac{13\pi}{9} \stackrel{x=\omega+2}{\Rightarrow}$

$$x = 2 + 2 \text{συν} \frac{13\pi}{9} \Leftrightarrow x = 2 + 2 \text{συν} \left(2\pi - \frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow \boxed{x = 2 + 2 \text{συν} \frac{5\pi}{9}}$$





▷ Για $z = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - i \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow y^3 = \sigma\upsilon\nu\frac{-\pi}{3} + i \cdot \eta\mu\frac{-\pi}{3} \Rightarrow$

$$y = \sigma\upsilon\nu\frac{6k\pi - \pi}{9} + i \cdot \eta\mu\frac{6k\pi - \pi}{9}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$\omega = y + \frac{1}{y} = y + \frac{\bar{y}}{y \cdot \bar{y}} = y + \frac{\bar{y}}{|y|^2} = y + \frac{\bar{y}}{1^2} = y + \bar{y} = 2 \cdot \text{Re}(y)$$

• Για $k = 0$: $y = \sigma\upsilon\nu\frac{-\pi}{9} + i \cdot \eta\mu\frac{-\pi}{9} \Rightarrow y = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} - i \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9} \xrightarrow{\omega=2\text{Re}(y)} \Rightarrow$

$$\omega = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \xrightarrow{x=\omega+2} \boxed{x = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}}$$

• Για $k = 1$: $y = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9} + i \cdot \eta\mu\frac{5\pi}{9} \xrightarrow{\omega=2\text{Re}(y)} \Rightarrow \omega = 2\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9} \xrightarrow{x=\omega+2} \Rightarrow$

$$\boxed{x = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9}}$$

• Για $k = 2$: $y = \sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{9} + i \cdot \eta\mu\frac{11\pi}{9} \xrightarrow{\omega=2\text{Re}(y)} \Rightarrow \omega = 2\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{9} \xrightarrow{x=\omega+2} \Rightarrow$

$$x = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{9} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \frac{7\pi}{9}\right) \Leftrightarrow \boxed{x = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{9}}$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι :

$$\boxed{x_1 = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}, \quad x_2 = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9} \quad \text{και} \quad x_3 = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{9}}$$

οι οποίες είναι θετικές όπως ζητήθηκε στις εξετάσεις,
αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Μάνος Κοθρής
Μαθηματικός

