

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$,
άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, θα είναι $f(x_2) - f(x_1) > 0$,
οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- A2.** Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,
αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ell] = 0$.

A3. Θεώρημα Fermat

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ,
παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 (εσωτερικό σημείο του Δ)
και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$.

- A4.** α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό



ΘΕΜΑ Β

B1. $D_g = D_h = (0, +\infty)$

$$D_f = D_{g \circ h} = \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x > 0\}$$
$$= \{x \in (0, +\infty) \text{ και } x > 1\} = (1, +\infty)$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Επομένως $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, x > 1.$

B2. 1^{ος} τρόπος

$$f'(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)' = \frac{(x + 1)' \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2}$$
$$= \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}, x > 1$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 1$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1,

άρα f αντιστρέφεται.

2^{ος} τρόπος

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - 1 = \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η f είναι 1-1,

άρα f αντιστρέφεται.





3^{ος} τρόπος

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}, x > 1$$

$$x_1 > x_2 > 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{x_1 - 1} < 1 + \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα,

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f αντιστρέφεται.**

Εύρεση της αντίστροφης της f

1^{ος} τρόπος (γνωρίζοντας ότι η f είναι \downarrow)

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{2(+\infty)}{=} +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A) = (1, +\infty)$$

$$D_{f^{-1}} = f(A) = (1, +\infty) = D_f$$

Για $x > 1, y > 1$ έχουμε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y - 1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1.$$

$$\text{Είναι } D_{f^{-1}} = D_f \text{ και } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \text{ για κάθε } x \in D_f$$

επομένως **$f = f^{-1}$.**





2^{ος} τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της f)

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y - 1) = y + 1 \stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } x \in D_f &\Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ \frac{y+1 - y + 1}{y-1} > 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1 \text{ ή } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1.$$

Είναι $D_{f^{-1}} = D_f$ και $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, για κάθε $x \in D_f$

επομένως $f = f^{-1}$.

B3. Από το B2 ερώτημα έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, άρα

η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 1$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, άρα

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$.

B4. $f(A) = (1, +\infty)$, άρα $f(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

Ισχύει $-1 \leq \text{συν}x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x) > 1 \geq \text{συν}x$, για $x > 1$, δηλαδή

η εξίσωση $f(x) = \text{συν}x$ δεν έχει λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) + x - 2$, $x \in [1, 2]$.

- g συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών
- $g(1) = f(1) + 1 - 2 = -1 < 0$ και
 $g(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$

από Θ. Bolzano

η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$, δηλαδή

οι C_f και $(\varepsilon_1): y = -x + 2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ii) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ έχει εξίσωση :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x$$

επομένως **η C_f εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$.**

Γ2. Είναι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$, άρα η f' είναι γν. φθίνουσα στο $[1, 2]$

$$1 \leq x \leq 2 \xrightarrow{f \downarrow} f'(x) \geq f'(2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 1$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, 2]$,

άρα η f είναι 1-1, άρα **η f αντιστρέφεται.**

$$D_{f^{-1}} = f^{-1}([1, 2]) = [f(1), f(2)], \text{ άρα } \mathbf{D_{f^{-1}} = [0, 2]}.$$

Γ3. 1^{ος} τρόπος

Έστω $1 < x < 2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στα $[1, x]$ και $[x, 2]$,

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν :

$$x_1 \in (1, x), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(x_1) = \frac{f(x)}{x - 1} \quad (1)$$

$$x_2 \in (x, 2), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow f'(x_2) = \frac{2 - f(x)}{2 - x} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f'(x_1) > f'(x_2) \begin{matrix} (1) \\ \Leftrightarrow \\ (2) \end{matrix} \mathbf{\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}}$$

Γ3. 2^{ος} τρόπος

Έστω η συνάρτηση q , με $q(x) = (x-1) \cdot [2-f(x)] - (2-x) \cdot f(x)$, $x \in [1, 2]$.

$$q'(x) = (x-1)' \cdot [2-f(x)] + (x-1) \cdot [2-f(x)]' - (2-x)' \cdot f(x) - (2-x) \cdot f'(x), \quad x \in [1, 2] \Leftrightarrow$$

$$q'(x) = 1 \cdot [2-f(x)] + (x-1) \cdot [-f'(x)] + f(x) - (2-x) \cdot f'(x), \quad x \in [1, 2] \Leftrightarrow$$

$$q'(x) = 2 - \cancel{f(x)} - \cancel{xf'(x)} + f'(x) + \cancel{f(x)} - 2f'(x) + \cancel{xf'(x)}, \quad x \in [1, 2] \Leftrightarrow$$

$$q'(x) = 2 - f'(x), \quad x \in [1, 2]$$

$q''(x) = -f''(x) > 0$, $x \in [1, 2]$, άρα η q' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$

- q συνεχής στο $[1, 2]$
- q παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$
- $q(1) = q(2) = 0$

από Θ.Rolle υπάρχει $\kappa \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $q'(\kappa) = 0$

και επειδή η q' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ το κ είναι μοναδικό.

$$\triangleright 1 \leq x < \kappa \stackrel{q' \uparrow}{\Rightarrow} q'(x) < q'(\kappa) \Leftrightarrow q'(x) < 0$$

$$\triangleright \kappa < x \leq 2 \stackrel{q' \uparrow}{\Rightarrow} q'(\kappa) < q'(x) \Leftrightarrow q'(x) > 0$$

x	1	κ	2
$q'(x)$		○	
$q(x)$			

$$\left. \begin{array}{l} \triangleright 1 < x \leq \kappa \stackrel{q \downarrow}{\Rightarrow} q(1) > q(x) \Leftrightarrow q(x) < 0 \\ \triangleright \kappa \leq x < 2 \stackrel{q \uparrow}{\Rightarrow} q(x) < q(2) \Leftrightarrow q(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$q(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2) \Leftrightarrow$

$$(x-1) \cdot [2-f(x)] - (2-x) \cdot f(x) < 0, \quad \text{για κάθε } x \in (1, 2) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{array}$$

$$\frac{(x-1) \cdot [2-f(x)]}{(x-1) \cdot (2-x)} - \frac{(2-x) \cdot f(x)}{(x-1) \cdot (2-x)} < 0, \quad \text{για κάθε } x \in (1, 2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-f(x)}{2-x} - \frac{f(x)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}, \quad \text{για κάθε } x \in (1, 2)}$$



Γ4. i. Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

▷ Για $x = 1$ ή $x = 2$ ισχύει το "=", αφού $f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.

▷ Για $x \in (1, 2)$ από το Γ3 ερώτημα έχουμε :

$$\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \quad \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{array} \Leftrightarrow (2-x) \cdot f(x) > [2-f(x)] \cdot (x-1) \Leftrightarrow$$

$$2f(x) - \cancel{x \cdot f(x)} > 2x - 2 - \cancel{x \cdot f(x)} + f(x) \Leftrightarrow f(x) > 2x - 2$$

Επομένως $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$

ii. $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$ ή 2 .

Επομένως $\int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 (2x - 2) dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x) dx > [x^2 - 2x]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx > 0 - (-1) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx > 1 \quad (3)$$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$,

άρα η f είναι κοίλη στο $[1, 2]$,

άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της $(\varepsilon_2) : y = x$,

με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(2, 2)$, άρα

$f(x) \leq x$, για κάθε $x \in [1, 2]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 2$.

Επομένως $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 x dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x) dx < \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx < \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε :

$$1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = (e^x)' = e^x$

$$(\varepsilon) : y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon) : y - e^{x_1} = e^{x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$O(0, 0) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0 - e^{x_1} = e^{x_1} \cdot (0 - x_1) \Leftrightarrow -e^{x_1} = -x_1 \cdot e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - e = e \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon) : y = e \cdot x}$$

Δ2. • Για $x > 0$, είναι $f''(x) = (e^x)' = e^x > 0$,

άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε) , με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(x_1, f(x_1))$.

• Για $x = 0$, είναι $f(0) = 1$ και $\Gamma(0, 1) \notin (\varepsilon)$

• Για $x < 0$, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = e \cdot x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.


Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - e \cdot x, x < 0$.

$$g'(x) = (-e^{-x} + 2 - e \cdot x)' = e^{-x} - e, x < 0$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$$

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$		\circ	
$g(x)$			



▷ $\Delta_1 = (-\infty, -1]$: Η g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x} + 2 - ex) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-x} \cdot \left(-1 + \frac{2 - ex}{e^{-x}} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - ex}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e}{-e^{-x}} = 0, \text{ DL'H}$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{2 - ex}{e^{-x}} \right) = -1 < 0$$

• $g(-1) = 2$

Είναι $g(\Delta_1) = (-\infty, 2]$ και $0 \in g(\Delta_1)$,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.



▷ $\Delta_2 = (-1, 0)$: Η g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-e^{-x} + 2 - ex) = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x} + 2 - ex) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\Delta_2) = (1, 2)$$

$0 \notin g(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

Συμπερασματικά

η C_f και η ευθεία (ϵ) έχουν εκτός από το σημείο $A(1, e)$ ένα ακριβώς ακόμη κοινό σημείο $B(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < -1$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = f(x) - e \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως διαφορά συνεχών και έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1 = 1$ και x_0 όπως βρήκαμε στο Δ2.

Από συνέπειες Θ. Bolzano, η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_0, 1)$ και επειδή $x_0 < 0 < 1$ με $h(0) = f(0) = 1 > 0$ θα είναι $h(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, 1)$.

Είναι $h(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_0, 1]$, άρα

$$E = \int_{x_0}^1 h(x) dx = \int_{x_0}^1 [f(x) - ex] dx = \int_{x_0}^1 f(x) dx - \int_{x_0}^1 ex dx$$

$$= \int_{x_0}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx - \left[\frac{e \cdot x^2}{2} \right]_{x_0}^1$$

$$= \int_{x_0}^0 (-e^{-x} + 2) dx + \int_0^1 e^x dx - \left(\frac{e}{2} - \frac{e \cdot x_0^2}{2} \right)$$

$$= [e^{-x} + 2x]_{x_0}^0 + [e^x]_0^1 - \frac{e}{2} + \frac{e \cdot x_0^2}{2}$$

$$= 1 - e^{-x_0} - 2x_0 + e - 1 - \frac{e}{2} + \frac{e \cdot x_0^2}{2}$$

$$= \left(\frac{e \cdot x_0^2}{2} - 2x_0 - e^{-x_0} + \frac{e}{2} \right) \text{ τ.μ.}$$

$$\begin{aligned} h(x_0) = 0 &\Leftrightarrow \\ -e^{-x_0} + 2 - ex_0 &= 0 \Leftrightarrow \\ -e^{-x_0} &= ex_0 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ή } E \stackrel{(3)}{=} \frac{e \cdot x_0^2}{2} - 2x_0 + ex_0 - 2 + \frac{e}{2} = \left(\frac{e \cdot x_0^2}{2} + (e-2) \cdot x_0 + \frac{e-4}{2} \right) \text{ τ.μ.}$$





Δ4. Το κινητό1 κινείται στη C_f και $\Delta(x_2, f(x_2))$ είναι μία τυχαία του θέση.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $Z(-\ln 2, 0)$, άρα $x_2 \in [x_0, -\ln 2]$

Το κινητό2 κινείται κατά μήκος της ευθείας (ϵ), από το B στο O και

$E(x_3, ex_3)$ είναι η αντίστοιχη θέση του, με $x_3 \in [x_0, 0]$.

Οι τεταγμένες των Δ, E είναι ίσες, άρα $f(x_2) = ex_3 \Leftrightarrow -e^{-x_2} + 2 = ex_3$

1^{ος} τρόπος

$$-e^{-x_2} + 2 = ex_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{2 - e^{-x_2}}{e} \Leftrightarrow x_3 = \frac{2}{e} - e^{-1-x_2}$$

Άρα η οριζόντια απόστασή τους $(\Delta E) = |x_3 - x_2| = \frac{2}{e} - e^{-1-x_2} - x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση d , με $d(x) = \frac{2}{e} - e^{-1-x} - x, x \in [x_0, -\ln 2]$.

$$d'(x) = \left(\frac{2}{e} - e^{-1-x} - x \right)' = e^{-1-x} - 1, x \in [x_0, 0].$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} = 1 \Leftrightarrow -1 - x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-1-x} > 1 \Leftrightarrow -1 - x > 0 \Leftrightarrow x < -1$$

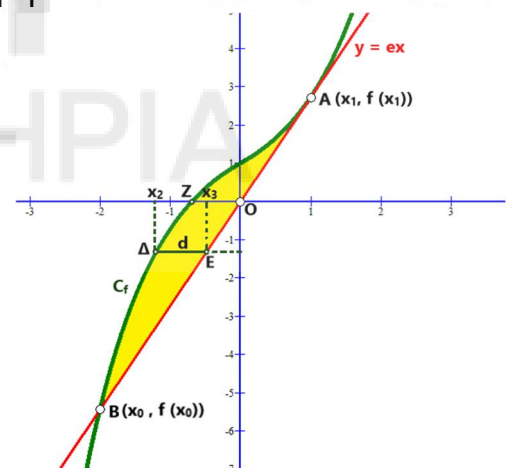
x	x_0		-1		$-\ln 2$
$d'(x)$			\circ		
$d(x)$		\nearrow		\searrow	

Η d παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$ την τιμή

$$d(-1) = -e^0 + \frac{2}{e} - (-1) = -1 + \frac{2}{e} + 1 = \frac{2}{e}$$

Επομένως

η μέγιστη απόσταση των δύο κινητών κατά τη διάρκεια της κίνησής τους είναι $\frac{2}{e}$ μονάδες.



2^{ος} τρόπος

$$-e^{-x_2} + 2 = ex_3 \Leftrightarrow e^{-x_2} = 2 - ex_3 \Leftrightarrow$$

$$-x_2 = \ln(2 - ex_3) \Leftrightarrow x_2 = -\ln(2 - ex_3)$$

Άρα η οριζόντια απόστασή τους $(\Delta E) = |x_3 - x_2| = x_3 + \ln(2 - ex_3)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση d , με $d(x) = x + \ln(2 - ex)$, $x \in [x_0, 0]$.

$$d'(x) = (x + \ln(2 - ex))' = 1 + \frac{-e}{2 - ex} = \frac{2 - ex - e}{2 - ex}, \quad x \in [x_0, 0].$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - ex - e = 0 \Leftrightarrow ex = 2 - e \Leftrightarrow x = \frac{2 - e}{e}$$

$$d'(x) > 0 \stackrel{2 - ex > 0}{\Leftrightarrow} 2 - ex - e > 0 \Leftrightarrow ex < 2 - e \Leftrightarrow x < \frac{2 - e}{e}$$

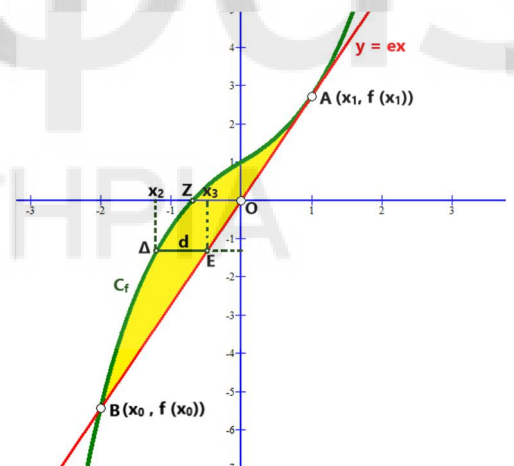
x	x_0	$\frac{2 - e}{e}$	0
$d'(x)$		+	-
$d(x)$		↗	↘

Η d παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{2 - e}{e}$ την τιμή

$$\begin{aligned} d\left(\frac{2 - e}{e}\right) &= \frac{2 - e}{e} + \ln\left(2 - e \frac{2 - e}{e}\right) = \frac{2 - e}{e} + \ln e \\ &= \frac{2 - e}{e} + 1 = \frac{2 - e + e}{e} = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Επομένως

η μέγιστη απόσταση των δύο κινητών κατά τη διάρκεια της κίνησής τους είναι $\frac{2}{e}$ μονάδες.



Λίγες ακόμη σκέψεις για το ερώτημα Δ4

Αν τα κινητά είχαν ίδια τετμημένη ποια θα ήταν η μέγιστη απόστασή τους;

Το κινητό1 κινείται στη C_f και $\Delta(x_2, f(x_2))$ είναι μία τυχαία του θέσης.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Η C_f τέμνει τον άξονα x στο σημείο $Z(-\ln 2, 0)$, άρα $x_2 \in [x_0, -\ln 2]$

Το κινητό2 κινείται κατά μήκος της ευθείας (ϵ), από το B στο O και

$H(x_2, ex_2)$ είναι η αντίστοιχη θέση του, με $x_2 \in [x_0, -\ln 2]$.

Οι τετμημένες των Δ, E είναι ίσες, άρα

$$\text{η κατακόρυφη απόστασή τους } (\Delta H) = |f(x_2) - ex_2| = 2 - e^{-x_2} - ex_2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση q , με $q(x) = 2 - e^{-x} - ex, x \in [x_0, -\ln 2]$.

$$q'(x) = (2 - e^{-x} - ex)' = e^{-x} - e, x \in [x_0, 0].$$

$$q'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

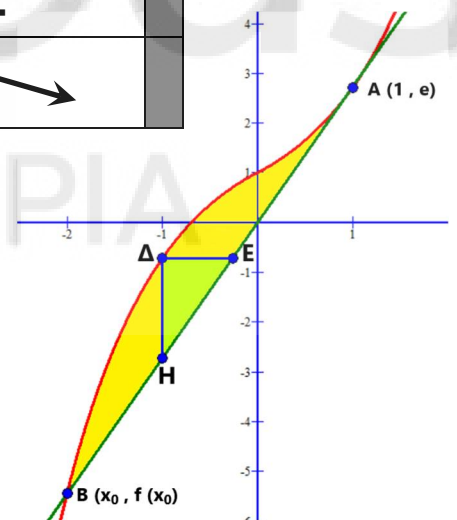
$$q'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$$

x	x_0		-1		$-\ln 2$
$q'(x)$			\ominus		
$q(x)$		\nearrow		\searrow	

Η q παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$ την τιμή

$$q(-1) = 2 - e + e = 2.$$

Επομένως όταν $x = -1$ και $\Delta(-1, 2 - e)$, τότε κατακόρυφη απόσταση (ΔH) γίνεται μέγιστη.



Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του κινητού1 από την ευθεία $y = ex$;

Το κινητό1 κινείται στη C_f και $\Delta(x_2, f(x_2))$ είναι μία τυχαία του θέσης.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Η C_f τέμνει τον άξονα x στο σημείο $Z(-\ln 2, 0)$, άρα $x_2 \in [x_0, -\ln 2]$

$$(\varepsilon) : y = ex \Leftrightarrow (\varepsilon) : -ex + y = 0$$

Η απόσταση του Δ από την ευθεία (ε) είναι :

$$d(\Delta, \varepsilon) = \frac{|-ex_2 + f(x_2)|}{\sqrt{(-1)^2 + e^2}} = \frac{|2 - e^{-x_2} - ex_2|}{\sqrt{e^2 + 1}} = \frac{(\Delta H)}{\sqrt{e^2 + 1}}$$

η οποία γίνεται μέγιστη όταν η απόσταση (ΔH) γίνεται μέγιστη που όπως παραπάνω βρήκαμε αυτό συμβαίνει όταν $x_2 = -1$.

Συνοψίζοντας όταν το κινητό1 βρίσκεται στη θέση $\Delta(-1, 2 - e)$

- ▷ η απόσταση $(\Delta\Theta)$ από την $y = ex$ γίνεται μέγιστη
- ▷ η οριζόντια απόσταση (ΔE) γίνεται μέγιστη
- ▷ η κατακόρυφη απόσταση (ΔH) γίνεται μέγιστη
- ▷ η απόσταση (EH) γίνεται μέγιστη
- ▷ το εμβαδόν του τριγώνου ΔEH γίνεται μέγιστο

Μάνος Κοθρής
Μαθηματικός

