

Τράπεζα Θεμάτων

§3.2 - 1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΜΑ 2^ο

1. ΘΕΜΑ 12635

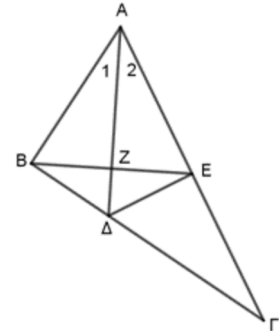
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών $AB, A\Gamma$ προς τα B, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE , ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)
 β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$. (Μονάδες 10)

2. ΘΕΜΑ 12705

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$.
 Η διχοτόμος του $\angle A$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z .
 Να αποδείξετε ότι:

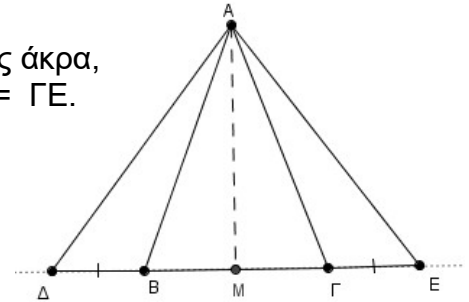
- α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 7)
 β) $\angle B = \angle E$. (Μονάδες 8)
 γ) $AZ \perp BE$. (Μονάδες 10)



3. ΘΕΜΑ 34774

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).
 Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.
 Να αποδείξετε ότι:

- α) $\angle B\Delta A = \angle A\Gamma E$. (Μονάδες 6)
 β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 7)



4. ΘΕΜΑ 36099

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A E = \frac{1}{3}A\Gamma$.

Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα. (Μονάδες 5)
 β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 γ) το τρίγωνο $\Delta E M$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

5. ΘΕΜΑ 36100

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$.
 Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda = BM$.
 Να αποδείξετε ότι:

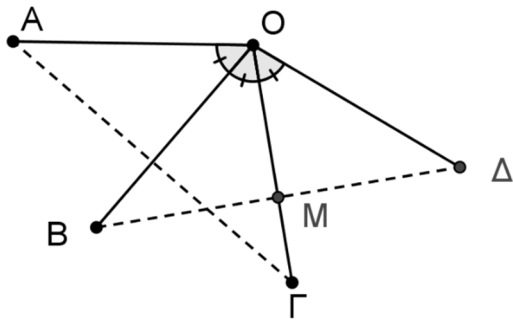
- α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)
 β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$. (Μονάδες 13)

6. ΘΕΜΑ 36104

Δίνεται γωνία $\angle xOy$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $MA = MB$. (Μονάδες 15)
 β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle AMB$. (Μονάδες 10)

7. ΘΕΜΑ 36110



Αν $\hat{AOB} = \hat{BOΓ} = \hat{ΓΟΔ}$ και $OA = OB = OΓ = OD$,
να αποδείξετε ότι:

- α) $ΑΓ = ΒΔ$. (Μονάδες 10)
β) το M είναι μέσον της $ΒΔ$,
όπου M το σημείο τομής των τμημάτων
 $OΓ$ και $ΒΔ$. (Μονάδες 15)

8. ΘΕΜΑ 36170

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών
 BA και $ΓA$ (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και $Δ$ αντίστοιχα τέτοια
ώστε $AD = AE$. Να αποδείξετε ότι:

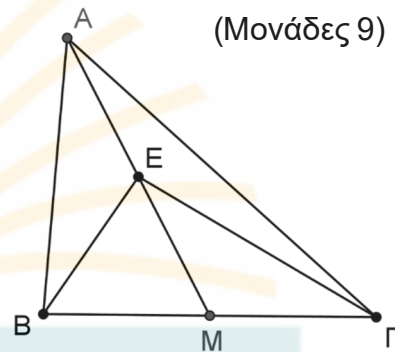
- α) $BE = ΓΔ$, (Μονάδες 6)
β) $BD = ΓE$, (Μονάδες 10)
γ) $\hat{ΔBΓ} = \hat{EΓB}$. (Μονάδες 9)

9. ΘΕΜΑ 36333

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και E το μέσο της
διαμέσου του AM .

Αν $BΓ = 2 \cdot BE$, να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{AEB} = \hat{EMΓ}$ (Μονάδες 12)
β) $AB = EΓ$ (Μονάδες 13)



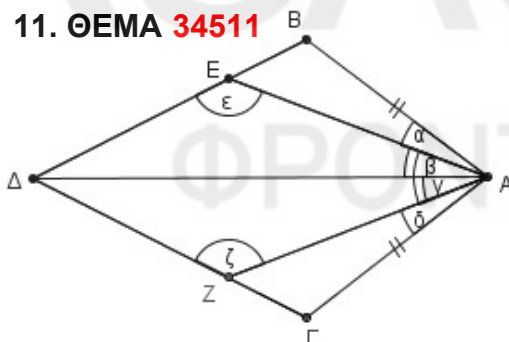
§3.3 - 2° Κριτήριο ισότητας τριγώνων
ΘΕΜΑ 2°

10. ΘΕΜΑ 34493

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $ABΓ$ ($AB = AΓ$) και $A'B'Γ'$ ($A'B' = A'Γ'$).

- α) Να αποδείξετε ότι : αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A'}$,
τότε τα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AΓ = A'Γ'$ και $\hat{B} = \hat{B'}$,
τότε τα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

11. ΘΕΜΑ 34511



Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$
και $AB = AΓ$, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $ABΔ$ και $AΓΔ$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες. (Μονάδες 13)

12. ΘΕΜΑ 34780

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και $ΓA$ τριγώνου $ABΓ$ παίρνουμε τα
τμήματα $AD = AB$ και $AE = AΓ$. Να αποδείξετε ότι :

- α) Τα τρίγωνα $ABΓ$ και $AΔE$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $ABΓ$ και η προέκταση της AM τέμνει
την $EΔ$ στο Z , να δείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα $AΔZ$ και ABM είναι ίσα. (Μονάδες 7)
ii. $ZΔ = \frac{EΔ}{2}$ (Μονάδες 6)

§3.4 - 3^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΜΑ 2^ο

13. ΘΕΜΑ 12636

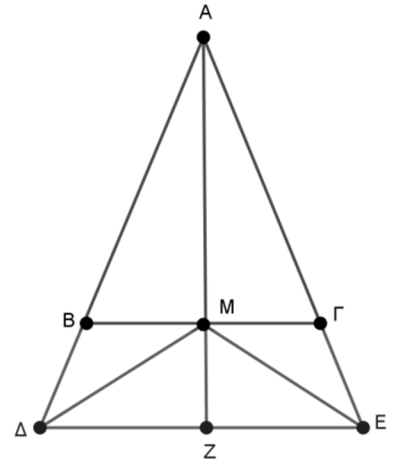
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$.

Στις προεκτάσεις των πλευρών $AB, A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta, \Gamma E$ αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

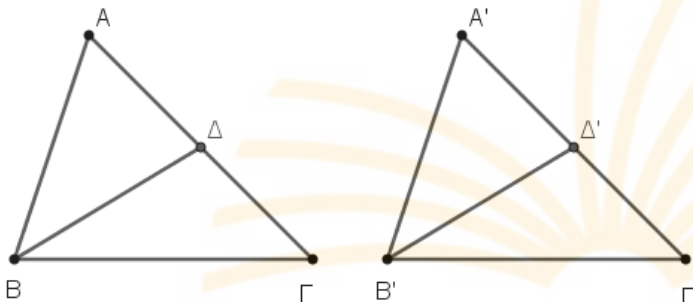
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE . (Μονάδες 7)



14. ΘΕΜΑ 13518



Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = \hat{A}'$ (Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

15. ΘΕΜΑ 13826

Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν

$AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$. (Μονάδες 12)

β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

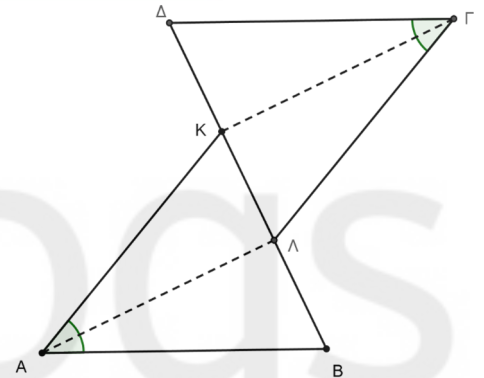
i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda, AK$ και $K\Delta$ είναι ίσα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

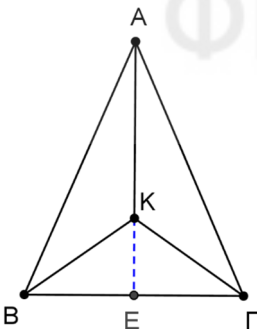
(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.

(Μονάδες 8)



16. ΘΕΜΑ 34773



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{BAG}$. (Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της AK τέμνει τη BK στο E , τότε να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$. (Μονάδες 7)

17. ΘΕΜΑ 34784

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

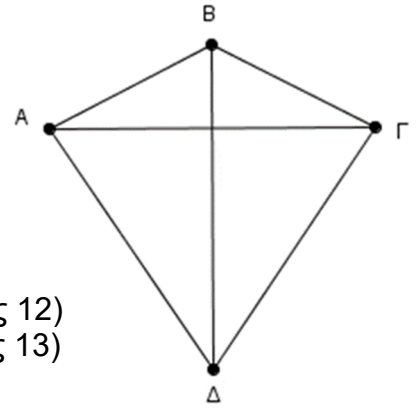
α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\hat{BAG}$. (Μονάδες 13)

18. ΘΕΜΑ 36102

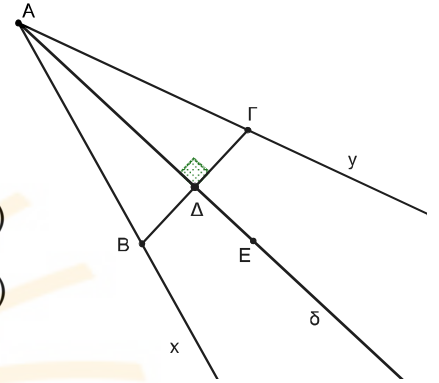
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.
Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες
και τέμνονται κάθετα.
Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$
του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)
β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 13)

**19. ΘΕΜΑ 36341**

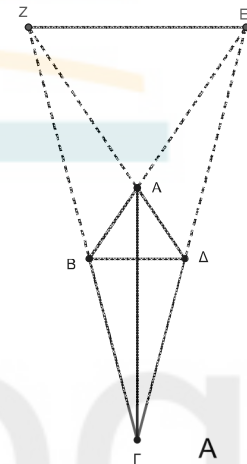
Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$.
Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη
διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ .
Να αποδείξετε ότι :

- α) Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ . (Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 4°****20. ΘΕΜΑ 14880**

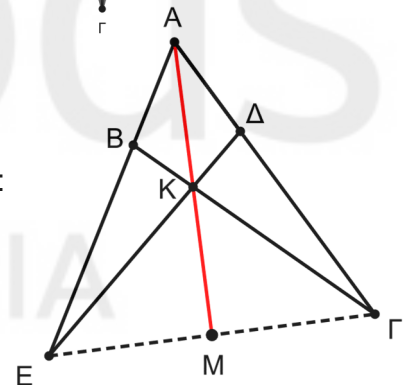
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$.
Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA
και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των
 ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

- α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)
β) $\Gamma Z = \Gamma E$ (Μονάδες 9)
γ) $EZ \parallel B\Delta$ (Μονάδες 9)

**21. ΘΕΜΑ 37124**

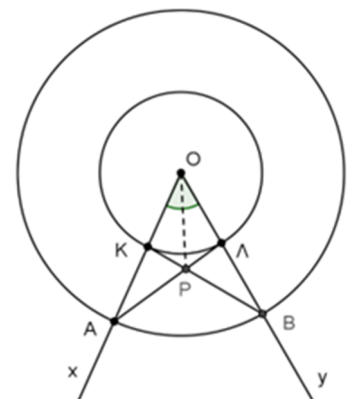
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB
(προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$.
Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$.
Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και
η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = \Delta E$. (Μονάδες 6)
β) $BK = K\Delta$. (Μονάδες 7)
γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A . (Μονάδες 6)
δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$. (Μονάδες 6)

**22. ΘΕΜΑ 37095**

Δίνεται οξεία γωνία xOy και δύο ομόκεντροι
κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) , με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την
 Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Lambda = BK$. (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το
σημείο τομής των $A\Lambda$, BK . (Μονάδες 8)
γ) Η OP διχοτομεί τη γωνία xOy . (Μονάδες 9)



§3.6 - Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

ΘΕΜΑ 2°

23. ΘΕΜΑ 12149

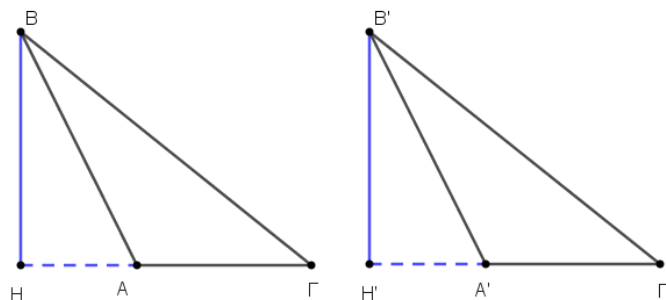
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα

$AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A'} > 90^\circ$)

με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



24. ΘΕΜΑ 13533

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

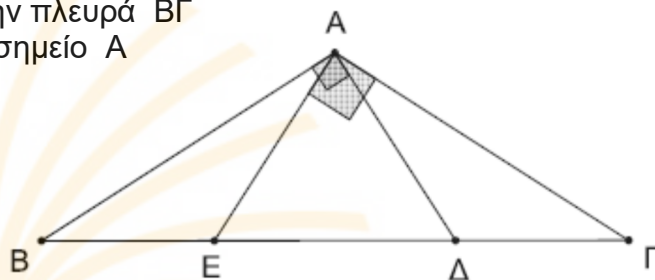
Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο E τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) $BE = \Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)



25. ΘΕΜΑ 34387

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Έστω EH και ΔZ οι κάθετες από τα σημεία E και Δ αντίστοιχα στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $EH = \Delta Z$. (Μονάδες 12)

26. ΘΕΜΑ 34401

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) $A\Delta = A E$ (Μονάδες 10)

27. ΘΕΜΑ 34404

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = M\Lambda$. (Μονάδες 13)

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $KM\Lambda$. (Μονάδες 12)

28. ΘΕΜΑ 34405

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και $M E$ στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $M\Delta = M E$ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)

29. ΘΕΜΑ 34497

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 13)

30. ΘΕΜΑ 34499

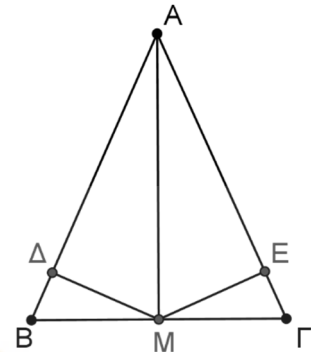
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και BD η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $DE \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία ED τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 12)

**31. ΘΕΜΑ 36330**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα MD και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

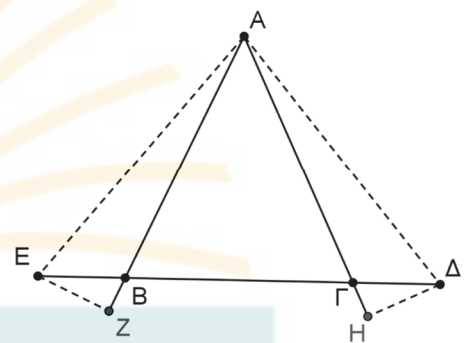
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MD = ME$, τότε τα τρίγωνα AMD και AME είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν $AB = A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $MD = ME$.

(Μονάδες 12)

**32. ΘΕΜΑ 36332**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ)

θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της

ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι

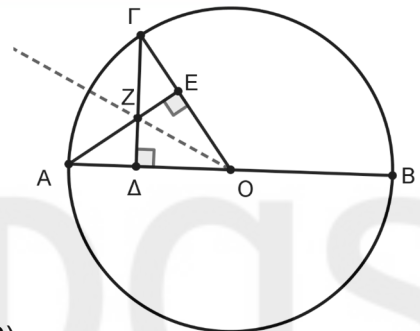
ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη

στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ

κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$ (Μονάδες 12)

β) $EZ = \Delta H$ (Μονάδες 13)

**33. ΘΕΜΑ 36345**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ .

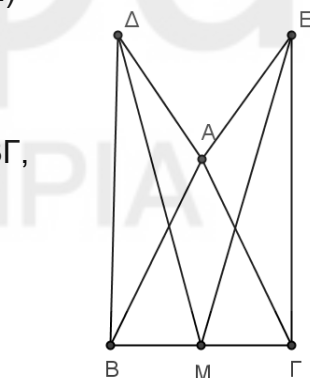
Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο

Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG

και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $\hat{AOG}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $A\Gamma$. (Μονάδες 12)

**34. ΘΕΜΑ 37012**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς

το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $BD \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$, τέτοια ώστε $BD = \Gamma E$.

Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) $A\Delta = AE$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3°**35. ΘΕΜΑ 13517**

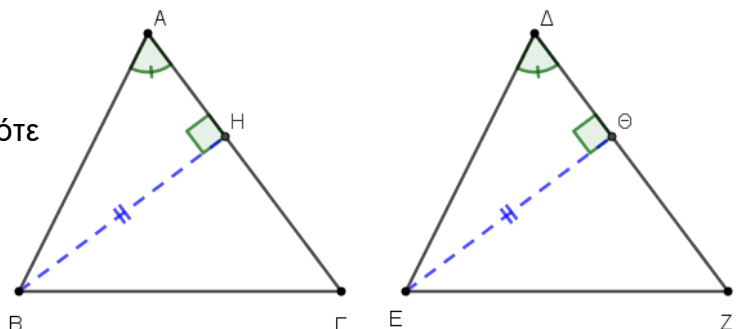
Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα

$AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$.

Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Delta E$. (Μονάδες 13)

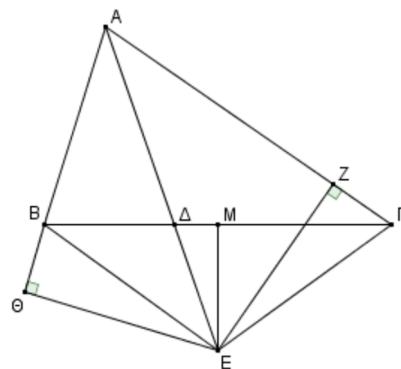
β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4°**36. ΘΕΜΑ 1707**

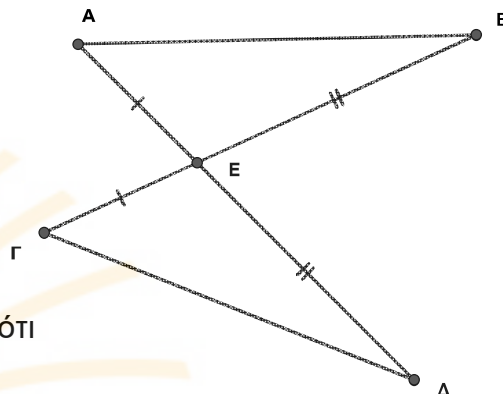
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) του διπλανού σχήματος, η κάθετη στο μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
 β) Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 γ) $\hat{A}\Gamma E + \hat{A}\beta E = 180^\circ$. (Μονάδες 12)

**37. ΘΕΜΑ 13839**

Τα ευθύγραμμα τμήματα AD και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E , έτσι ώστε $AE = GE$ και $BE = ED$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και GDE είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και $E\Theta$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $ΓΔ$, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)
 γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και $ΓΔ$ προς τα A και $Γ$ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BΔZ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

**38. ΘΕΜΑ 13854**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Οι διχοτόμοι BD και $ΓE$ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο O .

- α) Να αποδείξετε ότι $BD = ΓE$. (Μονάδες 9)
 β) Από τα σημεία E και Δ φέρνουμε κάθετες $ΕΛ$ και ΔK στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Delta K = ΕΛ$. (Μονάδες 9)
 γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ που η απόστασή του από το σημείο E να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και K αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**§3.7 - Κύκλος - Μεσοκάθετος – Διχοτόμος****ΘΕΜΑ 2°****39. ΘΕΜΑ 34424**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $BΙΓ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 β) Οι γωνίες $\hat{A}\Gamma I$ και $\hat{A}IB$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)
 γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 7)

40. ΘΕΜΑ 34503

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

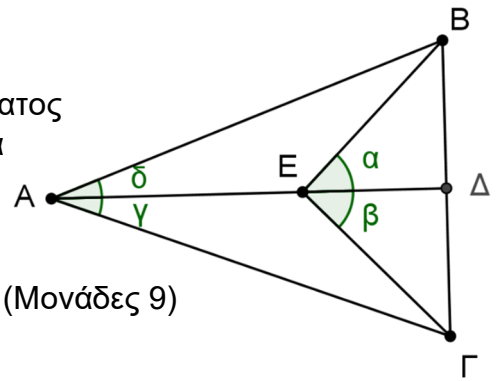
Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta ΓE$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
 β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE . (Μονάδες 12)

41. ΘΕΜΑ 34516

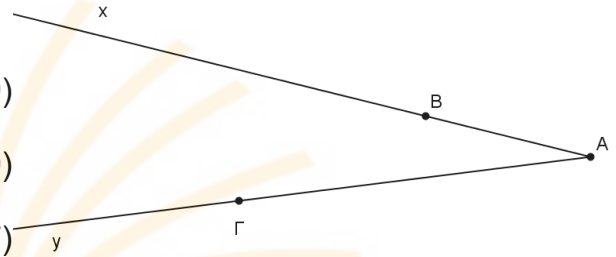
Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

- α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) Η ευθεία AD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 3°****42. ΘΕΜΑ 36226**

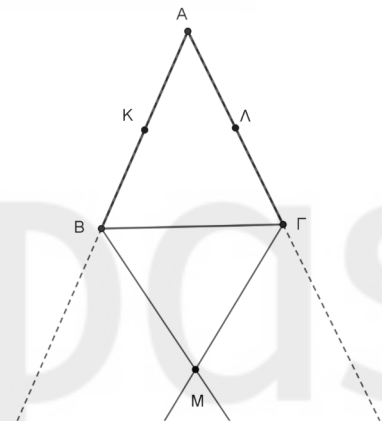
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δυο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δυο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- α) Ισαπέχει από τα δυο πλατάνια. (Μονάδες 9)
 β) Ισαπέχει από τα δυο ποτάμια. (Μονάδες 9)
 γ) Ισαπέχει και από τα δυο πλατάνια και από τα δυο ποτάμια. (Μονάδες 7)
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

**§3.11 - Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών****ΘΕΜΑ 2°****43. ΘΕΜΑ 34415**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Lambda M$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$. (Μονάδες 12)
 β) Να δείξετε ότι $MK = M\Lambda$. (Μονάδες 13)

**44. ΘΕΜΑ 34496**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

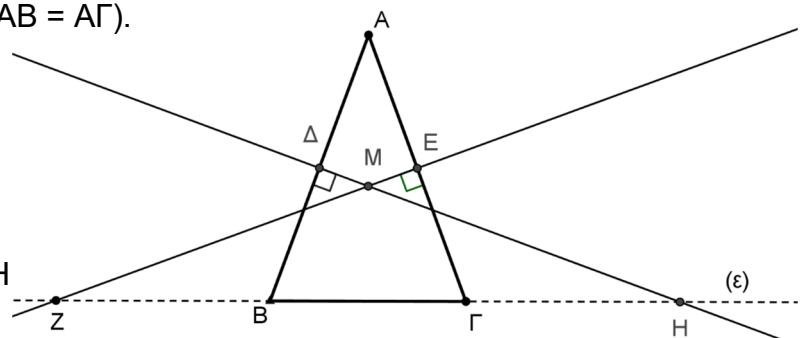
- α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$. (Μονάδες 13)

45. ΘΕΜΑ 34507

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και οι οποίες τέμνουν τον φορέα (ε) της βάσης $B\Gamma$ στα Z και H .

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B\Lambda$ και $E\Gamma\Lambda$. (Μονάδες 15)
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

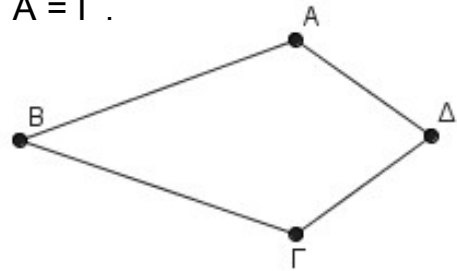
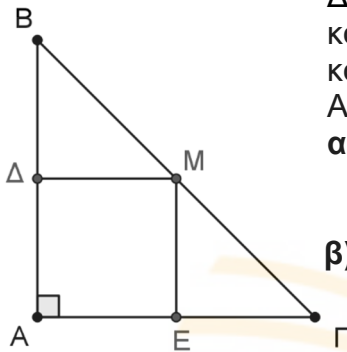


46. ΘΕΜΑ 34514

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
 γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

**47. ΘΕΜΑ 36331**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα MD και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν $MD = ME$ τότε:
 i) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 ii) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 β) Αν $AB = A\Gamma$, τότε $MD = ME$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3°**48. ΘΕΜΑ 12069**

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στην πλευρά AB σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 2\Delta A$, και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E , ώστε $E\Gamma = 2A\Gamma$. Το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
 ii. Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 β) Αν P το σημείο τομής των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:
 i. Οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)
 ii. Το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4°**49. ΘΕΜΑ 1875**

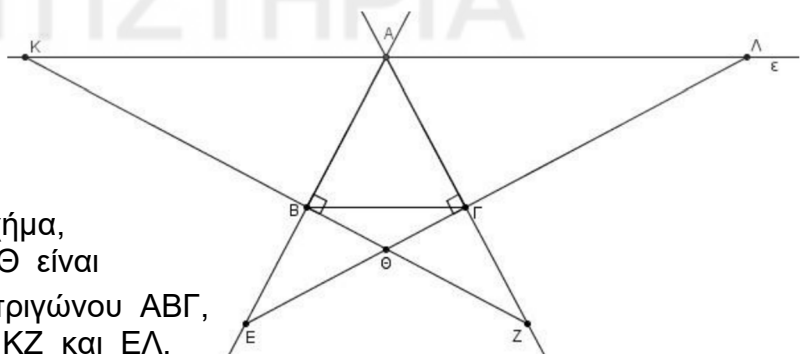
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$. Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ϵ στο Λ και την ευθεία AB στο E .

- α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$, (Μονάδες 8)

ii. $AK = A\Lambda$. (Μονάδες 9)

- β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



50. ΘΕΜΑ 37094

Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π : Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει. (Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

51. ΘΕΜΑ 37823

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AG = BG$).

Η μεσοκάθετη ϵ της AG τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του B) στο σημείο M και την AG στο Z .

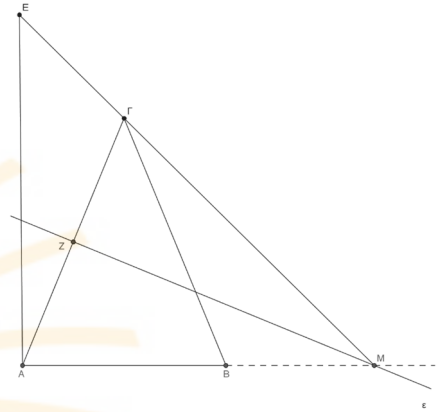
Στην προέκταση της $M\Gamma$ (προς το μέρος του Γ)

παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = BM$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Ναδειχτεί ότι το τρίγωνο AME είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

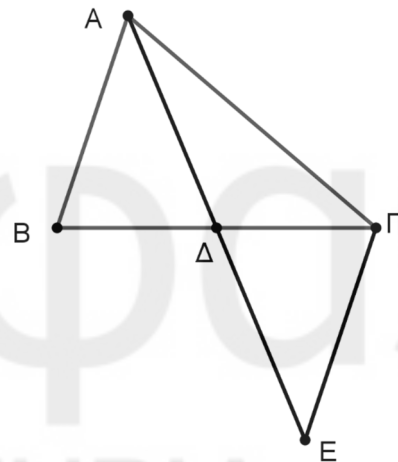
**§3.12 - Τριγωνική ανισότητα****ΘΕΜΑ 2°****52. ΘΕΜΑ 34502**

Στο διπλανό σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE = AD$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = GE$ (Μονάδες 12)

β) $AE < AB + AG$ (Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 4°****53. ΘΕΜΑ 1749**

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ϵ), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ϵ). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ϵ).

α) Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ϵ) διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$. (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ϵ). (Μονάδες 6)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ϵ), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$. (Μονάδες 6)

ii. $KA + KB > AO + OB$. (Μονάδες 7)

§3.13 - Κάθετες και πλάγιες

ΘΕΜΑ 2^ο

54. ΘΕΜΑ 34396

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

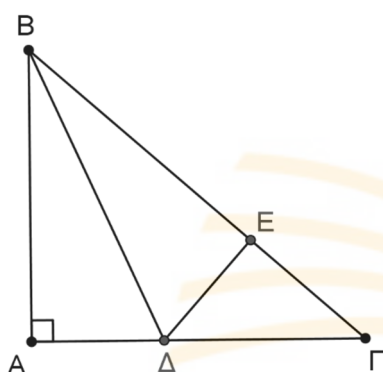
α) $A\Delta = \Delta E$

(Μονάδες 13)

β) $A\Delta < \Delta B$

(Μονάδες 12)

55. ΘΕΜΑ 36168



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A .

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B ,

η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η

γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας B .

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$

(Μονάδες 8)

β) $A\Delta < \Delta\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $A\Gamma > AB$

(Μονάδες 8)

§3.14 - Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

ΘΕΜΑ 2^ο

56. ΘΕΜΑ 13759

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ϵ) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ϵ) στις εξής περιπτώσεις:

α) $d = 3$.

(Μονάδες 9)

β) $d = 6$.

(Μονάδες 8)

γ) $d = 9$.

(Μονάδες 8)

57. ΘΕΜΑ 36344

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$.

Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

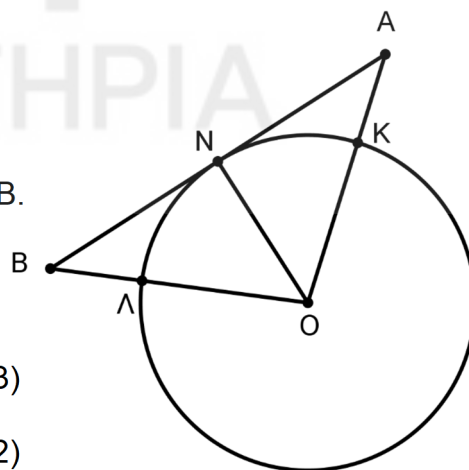
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

(Μονάδες 12)



§3.15 - Εφαπτόμενα τμήματα

ΘΕΜΑ 2°

58. ΘΕΜΑ 13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε

εφαπτόμενη ευθεία (ε) .

Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ

εκατέρωθεν του B , έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και

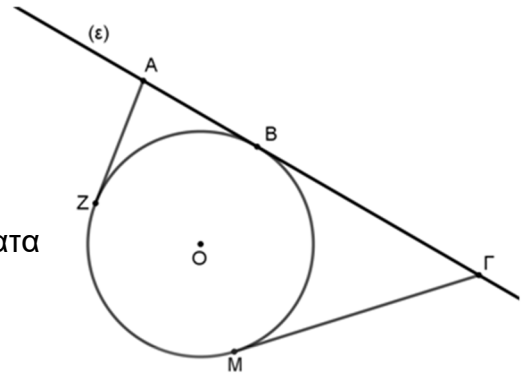
από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.

(Μονάδες 10)



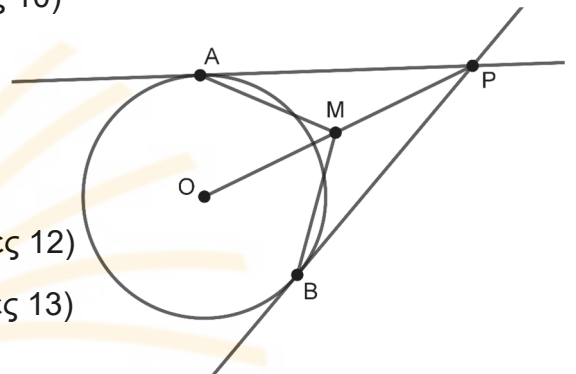
59. ΘΕΜΑ 36095

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB .

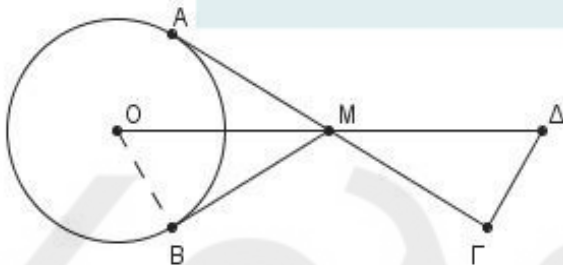
Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



60. ΘΕΜΑ 36098



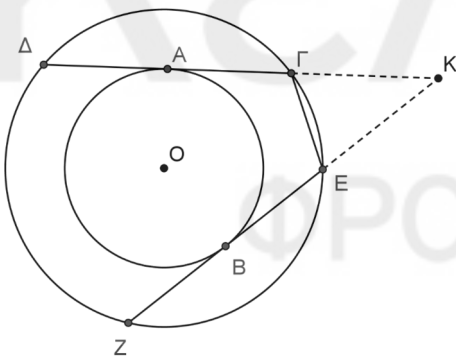
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

61. ΘΕΜΑ 36338



Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$. (Μονάδες 12)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

62. ΘΕΜΑ 36354

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε

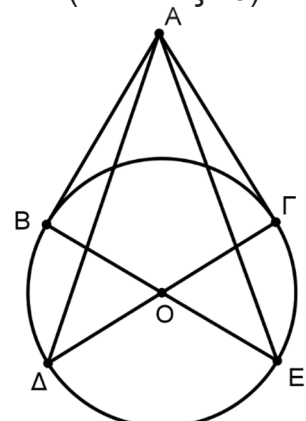
τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$.

Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4^ο

63. ΘΕΜΑ 1751

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $PΓΕ$ στα σημεία A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $PΓ = Γ\Delta + AP$

(Μονάδες 6)

ii. $PΓ - Γ\Delta = PE - \Delta E$

(Μονάδες 8)

β) Αν $ΑΓ = BE$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο $PΓΕ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

64. ΘΕΜΑ 1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P .

Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB .

Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ .

Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $PΓ\Delta$ είναι ισοσκελές.

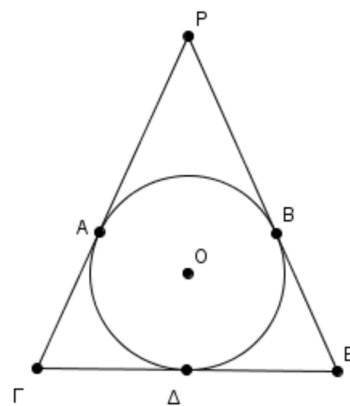
(Μονάδες 10)

β) $GA = \Delta B$.

(Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου $PΓ\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

(Μονάδες 7)



§3.16 - Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

ΘΕΜΑ 2^ο

65. ΘΕΜΑ 12417

Έστω δύο κύκλοι (K, R) , (Λ, r) , με $R = 3, r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

(Μονάδες 15)

β) $\widehat{K\Lambda} > \widehat{A\Lambda K}$.

(Μονάδες 10)

66. ΘΕΜΑ 13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

(Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

67. ΘΕΜΑ 13758

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$.

(Μονάδες 5)

β) $K\Lambda = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) $K\Lambda = 5$.

(Μονάδες 5)

δ) $K\Lambda = 11$.

(Μονάδες 5)

ε) $K\Lambda = 9$.

(Μονάδες 5)

68. ΘΕΜΑ 13835

Τα σημεία A, K και Λ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

α) Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

(Μονάδες 13)

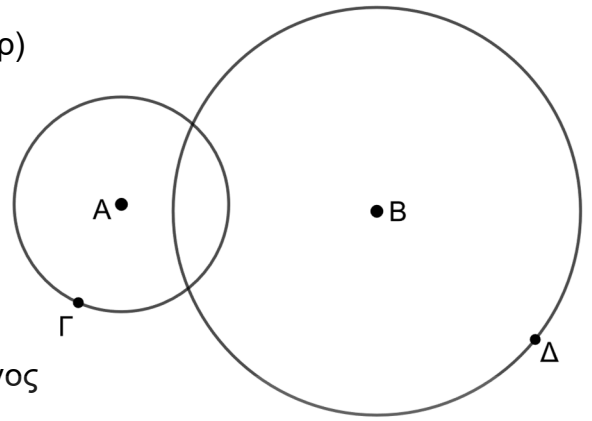
A

K

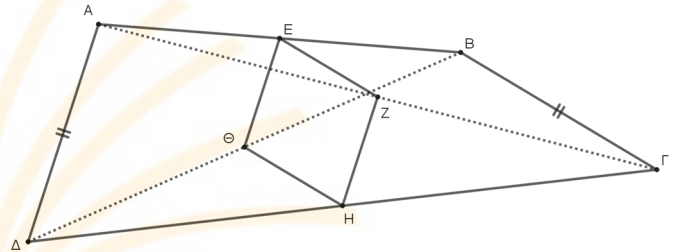
Λ

69. ΘΕΜΑ 13836

- α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$. Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$. (Μονάδες 10)
- β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6 . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός; (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 3°****70. ΘΕΜΑ 11896**

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος ισχύει ότι $AD = B\Gamma$ και τα σημεία E, Z, H και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, \Gamma\Delta$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



- α) $EZ \parallel H\Theta$ (Μονάδες 15)
- β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

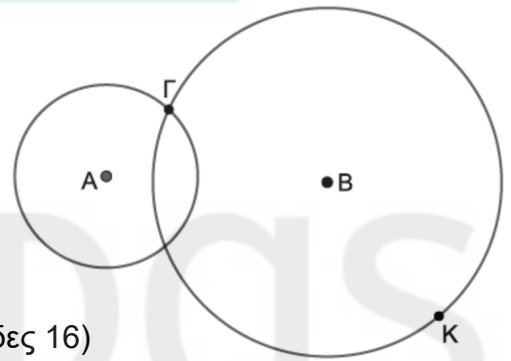
ΘΕΜΑ 4°**71. ΘΕΜΑ 13823**

- α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.
- Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.
 - Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

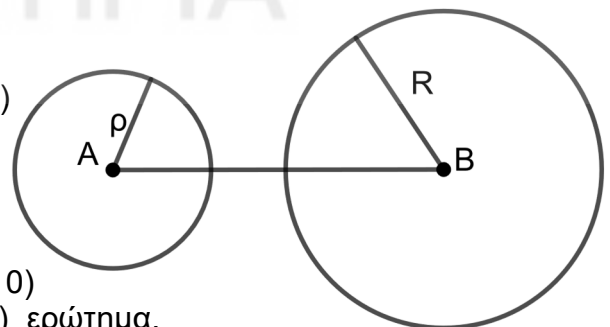
Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 16)
- β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6 . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό; (Μονάδες 9)

**72. ΘΕΜΑ 13846**

Δίνεται το σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

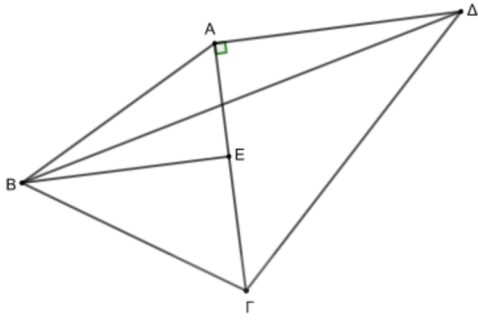
- α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$. (Μονάδες 7)
- β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $K\Lambda M$ με $K\Lambda$ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛM να είναι ίση με R . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9 . (Μονάδες 10)
- γ) Έστω το τρίγωνο $K\Lambda M$ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I_1 και I_2 που περιγράφονται παρακάτω;
- «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ ».
 - «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R ».
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



§4.2 - Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

ΘΕΜΑ 2°

73. ΘΕΜΑ 12710



Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας AG . Να αποδείξετε ότι:

α) $BE \parallel A\Delta$. (Μονάδες 10)

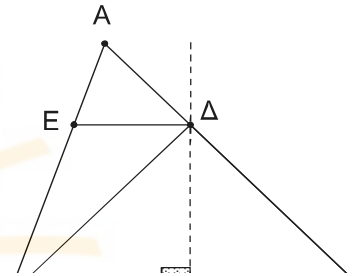
β) $\widehat{EB\Delta} = \widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

74. ΘΕΜΑ 13534

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 13)

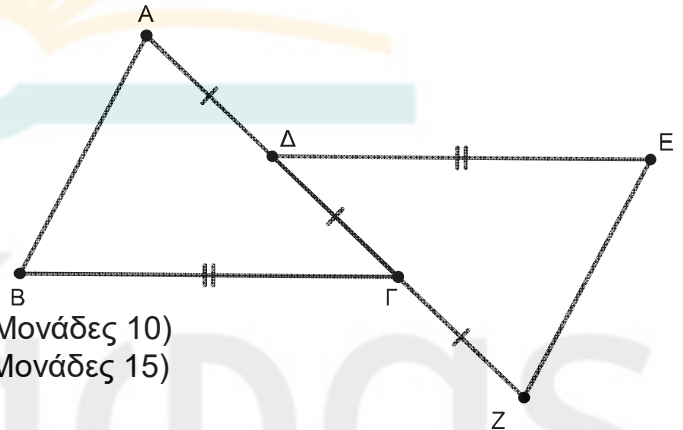


75. ΘΕΜΑ 13748

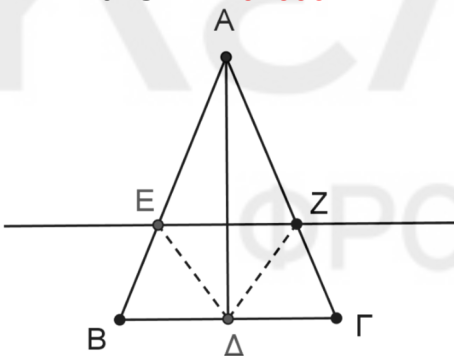
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- β) $AB \parallel EZ$. (Μονάδες 15)

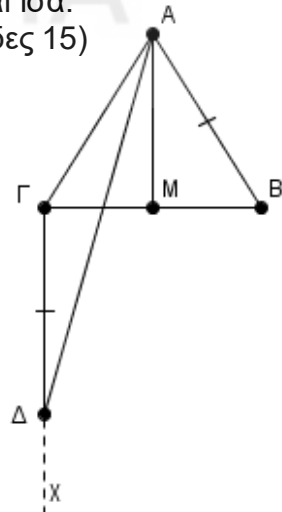


76. ΘΕΜΑ 34399



Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



77. ΘΕΜΑ 34777

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία $\widehat{\Delta A \Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\Gamma \Delta A}$. (Μονάδες 12)
- β) $\Gamma\Delta \parallel AM$. (Μονάδες 6)
- γ) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{M A \Gamma}$. (Μονάδες 7)

78. ΘΕΜΑ 34779

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα τμήματα $AD = AB$ και $AE = AG$.

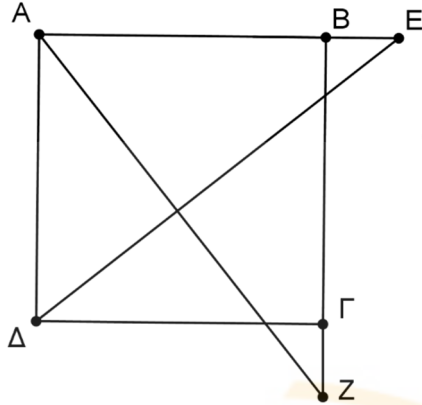
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) $ED \parallel BG$.

(Μονάδες 13)

79. ΘΕΜΑ 36165

Θεωρούμε τετράγωνο ABΓΔ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και BΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = ΓZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες EΔΓ και AZB είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4°**80. ΘΕΜΑ 1744**

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) φέρουμε τις διαμέσους BΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση BΓ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = ΓH$.

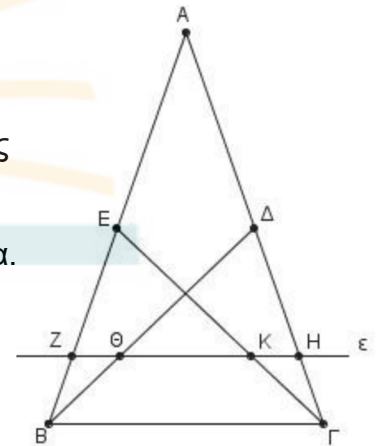
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ZBΘ και HKΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) $ZK = HΘ$.

(Μονάδες 8)

**81. ΘΕΜΑ 1783**

Σε τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel ΓΔ$) ισχύει $AB + ΓΔ = AD$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την BΓ στο E και την προέκταση της ΔΓ στο Z, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.

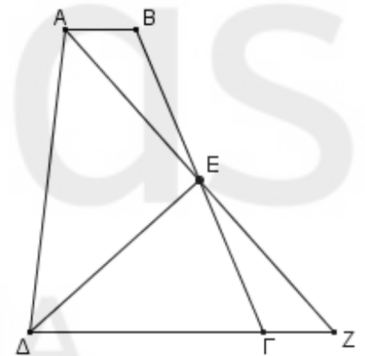
(Μονάδες 7)

β) Το E είναι το μέσο της BΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.

(Μονάδες 8)

**82. ΘΕΜΑ 1818**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$, η διχοτόμος του AΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το B προς την AG. Από το μέσο M της BΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AΔ η οποία τέμνει την AG στο σημείο Z, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και BΛΕ είναι ισοσκελή.

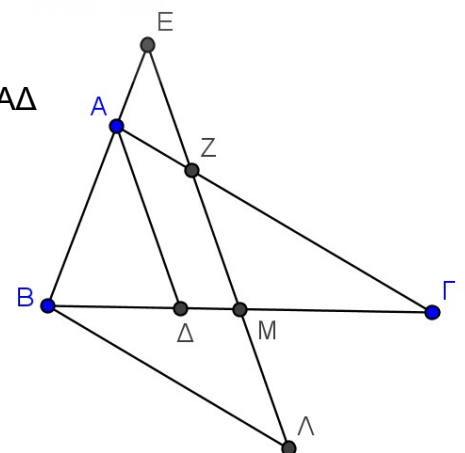
(Μονάδες 8)

β) $BΛ = ΓZ$.

(Μονάδες 9)

γ) $AE = AG - BΛ$.

(Μονάδες 8)



83. ΘΕΜΑ 13822

Δίνονται οι ευθείες (ϵ) και (ψ).

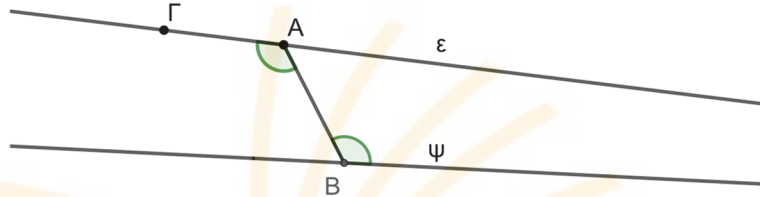
α) Αν η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{B\hat{A}\psi}$:

i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\epsilon} + \widehat{B\hat{A}\psi} < 180^\circ$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $\widehat{B\hat{A}\Gamma} < \widehat{B\hat{A}\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)

**84. ΘΕΜΑ 13843**

Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B\hat{A}x}$ και $\widehat{A\hat{B}y}$ τέμνονται σε σημείο M . (Μονάδες 6)

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB . (Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}x}$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{B}y}$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$. (Μονάδες 5)

85. ΘΕΜΑ 34335

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax .

Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

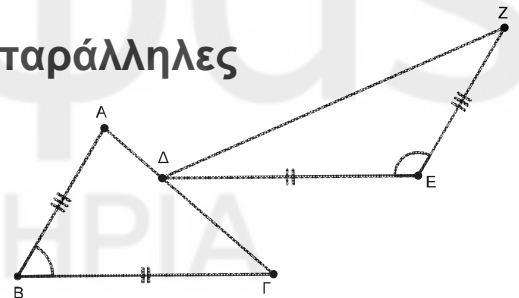
α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) (Μονάδες 9)

β) η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BMx}$ είναι κάθετη στη MO , (Μονάδες 9)

γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{BMx}$. (Μονάδες 7)

§4.4 - Γωνίες με πλευρές παράλληλες**ΘΕΜΑ 4°****86. ΘΕΜΑ 13752**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EH ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς.

Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\widehat{\Delta E Z}$ και $\widehat{A B \Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.

2. Οπότε $\widehat{\Delta E Z} = \widehat{A B \Gamma}$.

3. Τα τρίγωνα $\Delta E Z$ και $A B \Gamma$ είναι ίσα.

4. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $A \Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2 και 3. (Μονάδες 10)

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\widehat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $A \Gamma$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας B και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 7)

§4.6 - Άθροισμα γωνιών τριγώνου

ΘΕΜΑ 2°

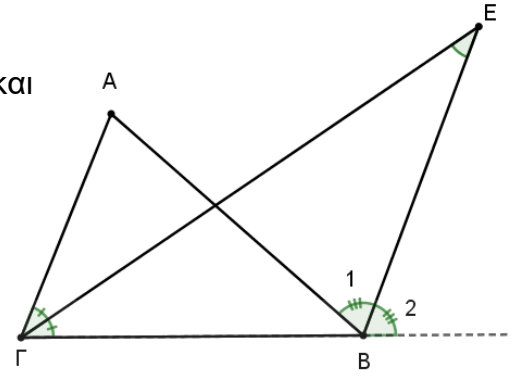
87. ΘΕΜΑ 1851

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο E .

Δίνεται ότι $\widehat{ABE} = 70^\circ = 2\widehat{GEB}$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle GBE$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. (Μονάδες 13)



88. ΘΕΜΑ 12704

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $AD = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{BAD} = 40^\circ$. (Μονάδες 9)

β) $\widehat{AD\Gamma} = 110^\circ$. (Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

89. ΘΕΜΑ 12707

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ,

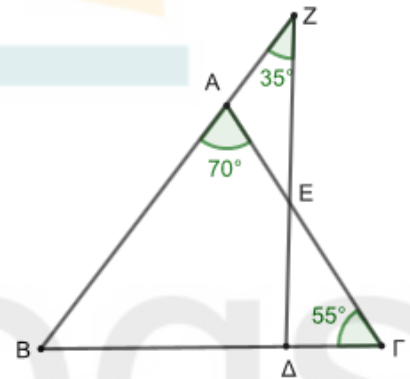
ώστε $\widehat{BZA} = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$.

Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $\widehat{ZDB} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

γ) το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



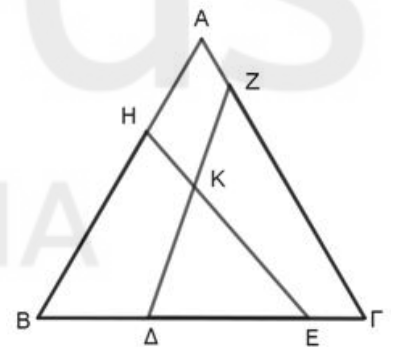
90. ΘΕΜΑ 12708

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και $ΓΑ$ θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $BE = ΓZ$. Στις πλευρές AB και $ΓB$ θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα, ώστε $BH = Γ\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K , το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EH = \Delta Z$ και $\widehat{BHE} = \widehat{Γ\Delta Z}$. (Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)



91. ΘΕΜΑ 12709

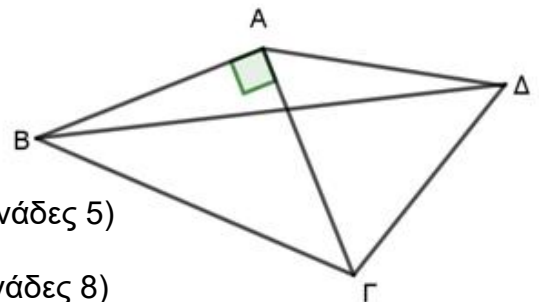
Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$

με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$. (Μονάδες 12)

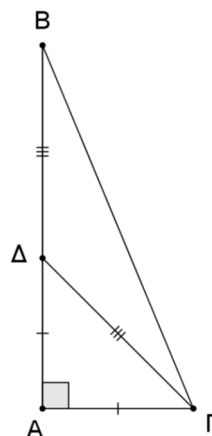


92. ΘΕΜΑ 13442

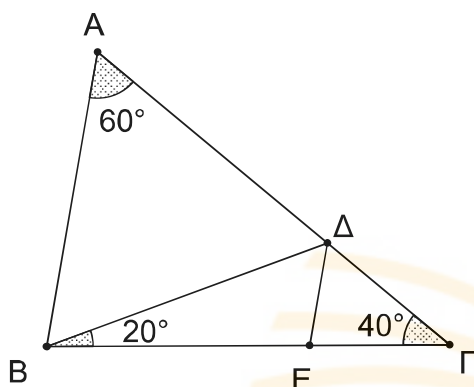
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.
Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ,
ώστε $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$. (Μονάδες 13)



93. ΘΕΜΑ 13443



Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.
Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε
 $\widehat{B\Delta} = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι
ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την
πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{B\Delta E} = 60^\circ$. (Μονάδες 8)

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Delta\Gamma}$.
(Μονάδες 7)

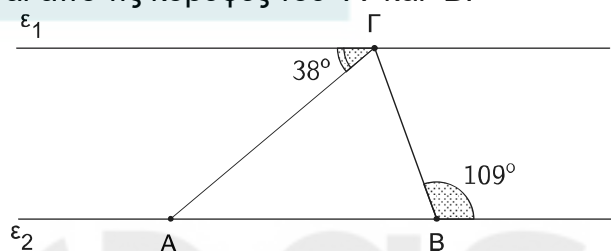
94. ΘΕΜΑ 13535

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ϵ_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$
και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B .
Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

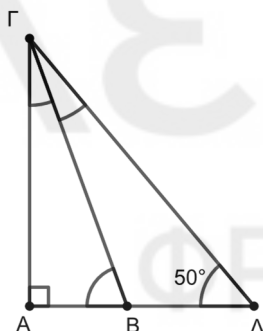
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του
τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$
είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες
είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 10)



95. ΘΕΜΑ 13654



Στο διπλανό σχήμα είναι

$\hat{A} = 90^\circ$, $\widehat{AB\Gamma} - \widehat{A\Gamma B} = 50^\circ$ και $\widehat{A\Delta\Gamma} = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma B}$
του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓB είναι διχοτόμος
της γωνίας $\widehat{A\Gamma\Delta}$ (Μονάδες 15)

96. ΘΕΜΑ 13687

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε
επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες
 OA και OB κατά τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα,
έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$,
όπως φαίνεται στο σχήμα.

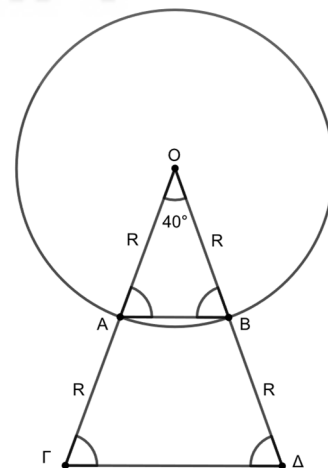
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 70^\circ$.

(Μονάδες 10)

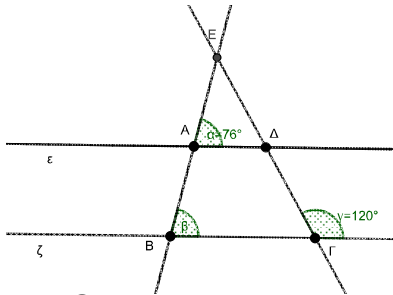
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{O\Gamma\Delta}$ και $\widehat{O\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. (Μονάδες 5)



97. ΘΕΜΑ 13741



Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες.

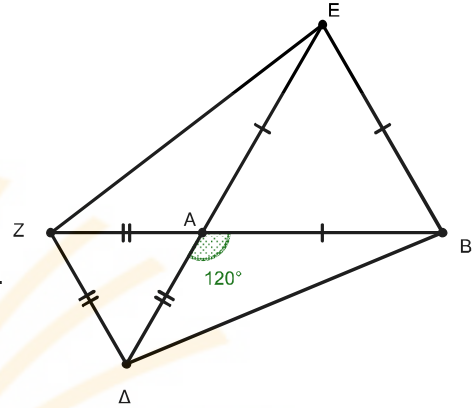
Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε:

- Τη γωνία $\hat{\beta}$. (Μονάδες 5)
- Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)
- Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ. (Μονάδες 8)

98. ΘΕΜΑ 14884

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = 120^\circ$.
Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.
Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο τμήμα ΒΕ. (Μονάδες 13)



99. ΘΕΜΑ 34397

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$).

Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.
Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

- $BE = AB$ (Μονάδες 12)
- Αν επιπλέον $\hat{BDA} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

100. ΘΕΜΑ 34413

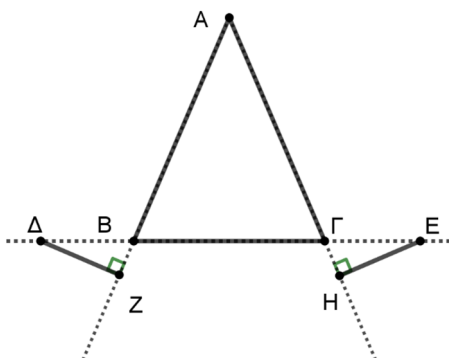
Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία ΧΟΨ. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

101. ΘΕΜΑ 34418

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας Β.

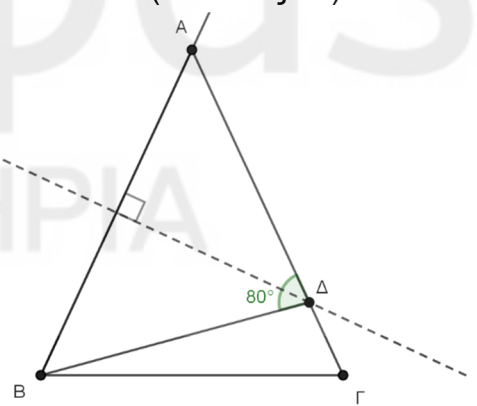
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$. (Μονάδες 10)
- Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία ΑΔΒ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

102. ΘΕΜΑ 34500

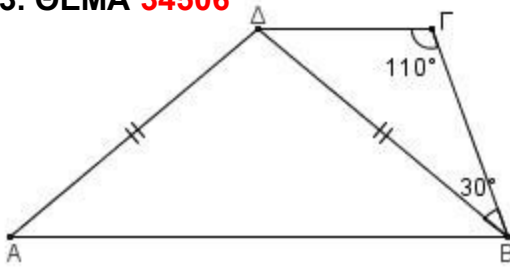


Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $BD = GE$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$.

- Να αποδείξετε ότι:
 - $BZ = GH$. (Μονάδες 10)
 - Το ΔZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)



103. ΘΕΜΑ 34506



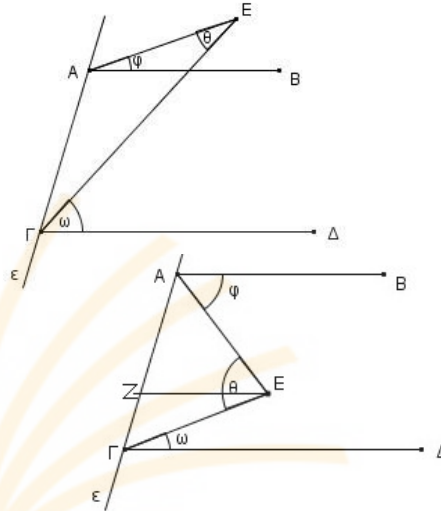
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AD . Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.
(Μονάδες 25)

104. ΘΕΜΑ 34770

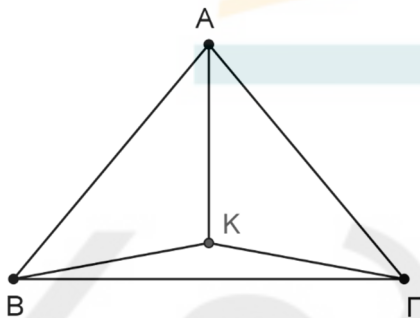
Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$.
(Μονάδες 10)

β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\phi}$.
(Μονάδες 15)



105. ΘΕΜΑ 34775



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = ΑΓ$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = ΚΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}K$ και $A\hat{\Gamma}K$.
(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$. (Μονάδες 7)

106. ΘΕΜΑ 34776

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 4+4)

ii) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Αν $A\hat{\Delta}B = 60^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 9)

107. ΘΕΜΑ 34778

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < ΑΓ$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{\text{εξ}} = 120^\circ$.

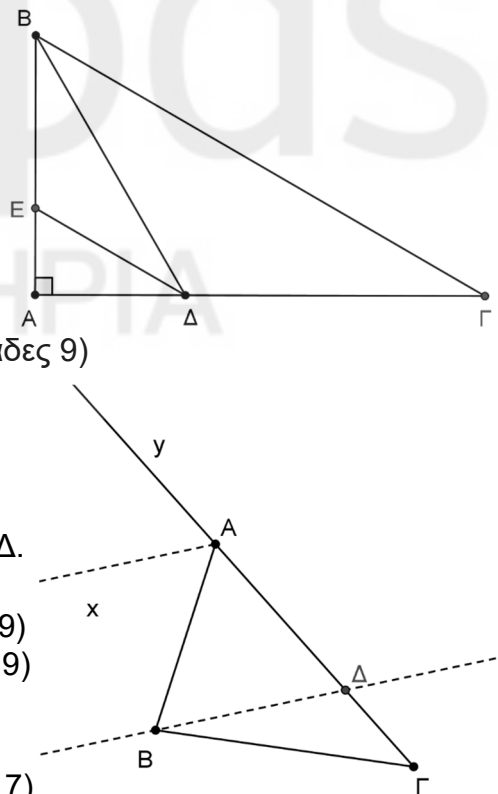
Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

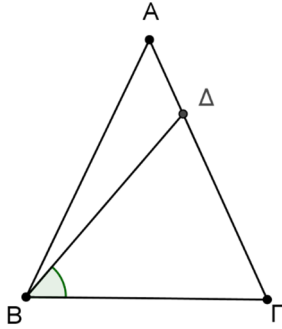
α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A\hat{B}\Delta = 60^\circ$ (Μονάδες 9)

ii) το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) Αν η γωνία $B\hat{\Delta}A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.
(Μονάδες 7)



108. ΘΕΜΑ 34785

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB = AG$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς AG , τέτοιο ώστε $BD = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)

109. ΘΕΜΑ 34786

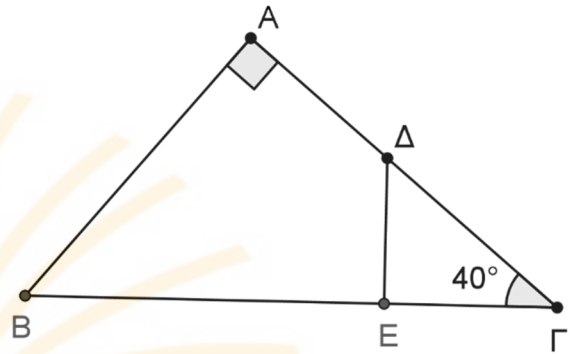
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς AG και $DE \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta EB$. (Μονάδες 15)

**110. ΘΕΜΑ 34787**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$.

Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε :

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 15)

111. ΘΕΜΑ 36087

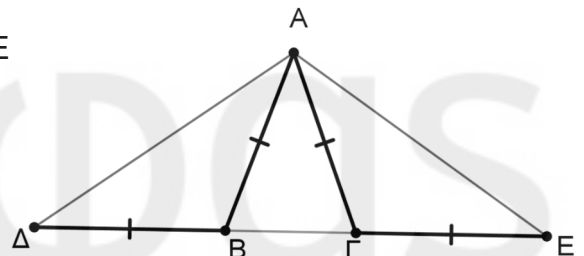
Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = AG = \Gamma E$

και $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

**112. ΘΕΜΑ 36101**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την AG στο E .
Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 13)

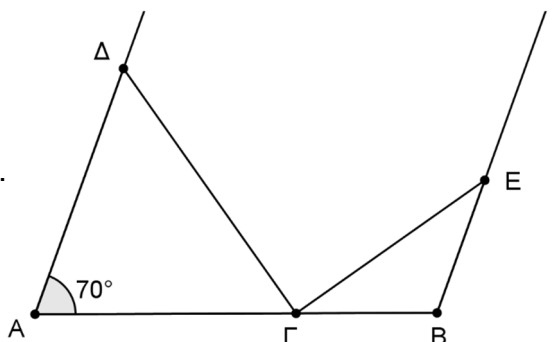
113. ΘΕΜΑ 36118

Στο διπλανό σχήμα, οι $A\Delta$ και BE είναι παράλληλες.

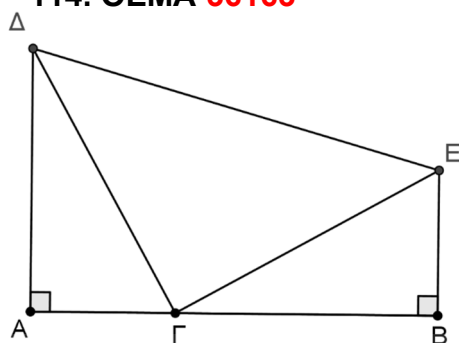
Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE . (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^\circ$. (Μονάδες 9)



114. ΘΕΜΑ 36163



Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $AD = BG$ και $AG = BE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AGD και BGE είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\angle EGB = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο DGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

115. ΘΕΜΑ 36167

Σε τρίγωνο ABG για τις γωνίες ισχύουν

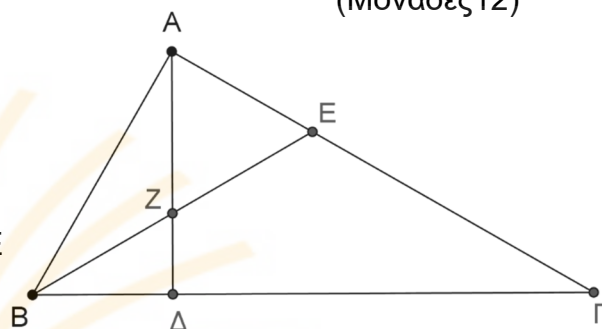
$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B} \text{ και } \hat{A} = 3\hat{\Gamma}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{B}$ είναι 60° .

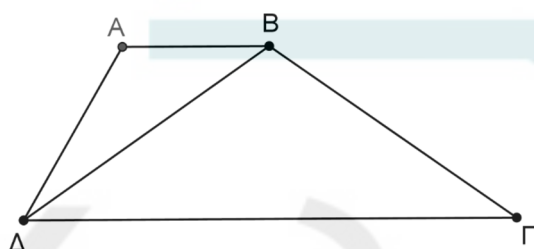
(Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του AD και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισοπλευρο.

(Μονάδες 15)



116. ΘΕΜΑ 36172



Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ με $AB \parallel GD$ και $BD = BG$. Αν $\angle BGD = 110^\circ$ και $\angle ADB = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 11)

β) τη γωνία $\hat{A}$.

(Μονάδες 14)

117. ΘΕΜΑ 36228

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο ABG .

Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο D στο εσωτερικό της πλευράς AG , ώστε $AE = AD$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 10)

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ED (προς το D) με την BG , να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην BG .

(Μονάδες 15)



118. ΘΕΜΑ 36329

Δίνεται τρίγωνο ABG και MD , NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , AG αντίστοιχα.

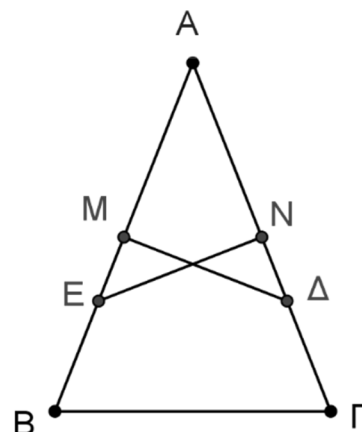
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MD = NE$, τότε το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν $AB = AG$, τότε $MD = NE$.

(Μονάδες 13)



119. ΘΕΜΑ 36336

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του AD , τέτοια ώστε $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = 30^\circ$.

Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $AD = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

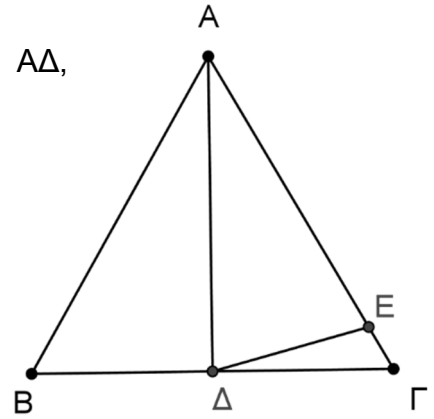
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 8)

**120. ΘΕΜΑ 37009**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$,

να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 7)

121. ΘΕΜΑ 37013

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 12)

122. ΘΕΜΑ 37014

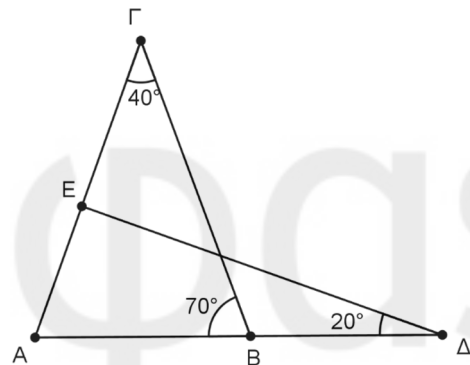
Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία $A\Delta E$ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 3°****123. ΘΕΜΑ 11882**

Στο σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{H}$, αντίστοιχα. Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

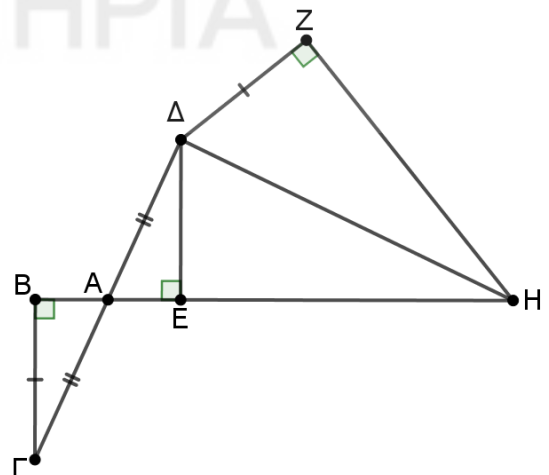
β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

(Μονάδες 6)

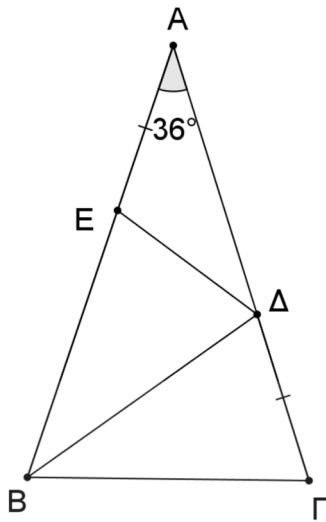
γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες,

$$\text{τότε } \hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}.$$

(Μονάδες 9)



124. ΘΕΜΑ 12200



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω BD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και E σημείο της πλευράς AB , ώστε $AE = GD$.

α) Να αποδείξετε ότι $AD = BD$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BDE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το B προς την AG τέμνει την προέκταση της DE (προς το E) στο σημείο Z .
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BZD είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4°

125. ΘΕΜΑ 1708

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην AG ώστε $DE = BD$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

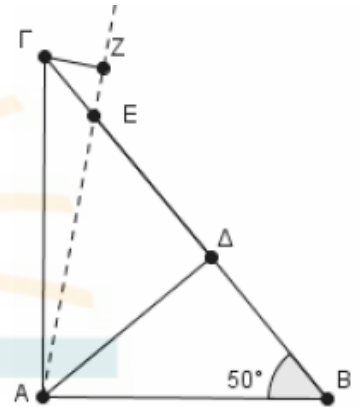
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii. $\hat{GA}E = 10^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZGE .

(Μονάδες 9)



126. ΘΕΜΑ 1784

Δίνεται τραπέζιο $ADEB$, με $AD \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = AD + BE$, και O το μέσον της DE .

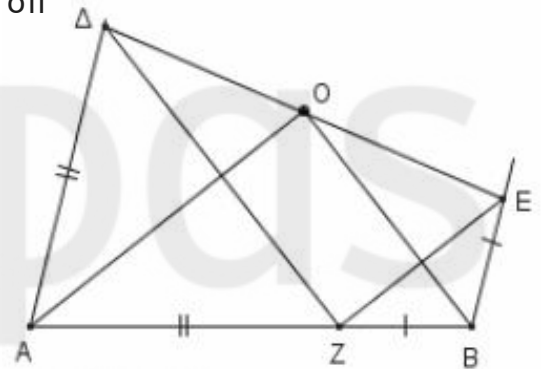
Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = AD$ και $BZ = BE$. Αν $\hat{AZ} = \varphi$:

α) να εκφράσετε τη γωνία AZD ως συνάρτηση της φ . (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία EZB ως συνάρτηση της φ . (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων DZ και ZE αντίστοιχα.

(Μονάδες 9)



127. ΘΕΜΑ 1792

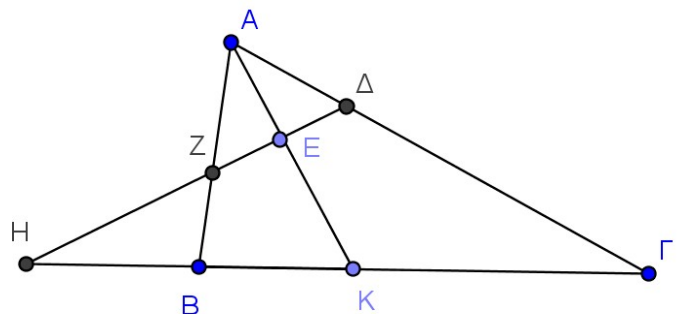
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\hat{K}$ και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και AG στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) $ZK = K\Delta$. (Μονάδες 8)

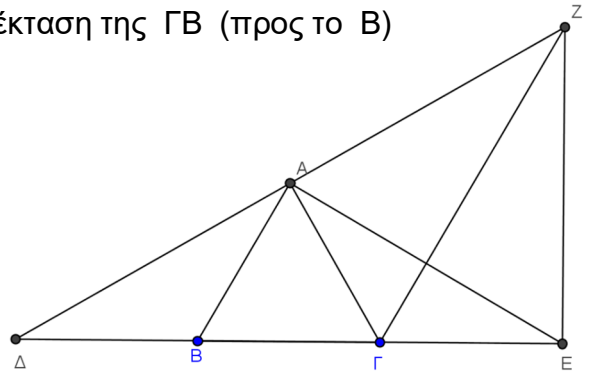
γ) $\hat{ZH\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 10)



128. ΘΕΜΑ 1819

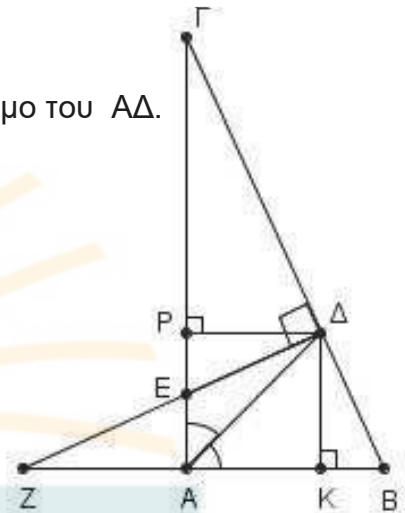
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην EZ στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B \Delta A$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του $A E$. (Μονάδες 12)
 γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$. (Μονάδες 6)

**129. ΘΕΜΑ 1894**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΔD . Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. $\hat{B} = \hat{\Delta E \Gamma}$. (Μονάδες 8)
 ii. $\Delta E = \Delta B$. (Μονάδες 8)
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta \Gamma Z$. (Μονάδες 9)

**130. ΘΕΜΑ 13499**

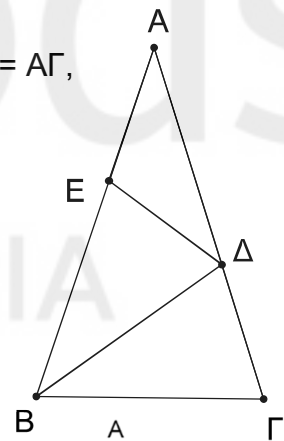
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E , τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) $\Gamma \hat{A} \Delta = \Delta \hat{A} H$ και $E \hat{A} B = H \hat{A} E$. (Μονάδες 14)
 β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$. (Μονάδες 11)

131. ΘΕΜΑ 13537

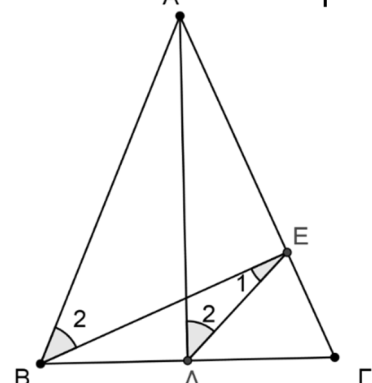
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $A E = \Gamma \Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$. (Μονάδες 6)
 ii. $\hat{A} = 36^\circ$. (Μονάδες 6)
 iii. Το τρίγωνο $A \Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B \Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

**132. ΘΕΜΑ 34321**

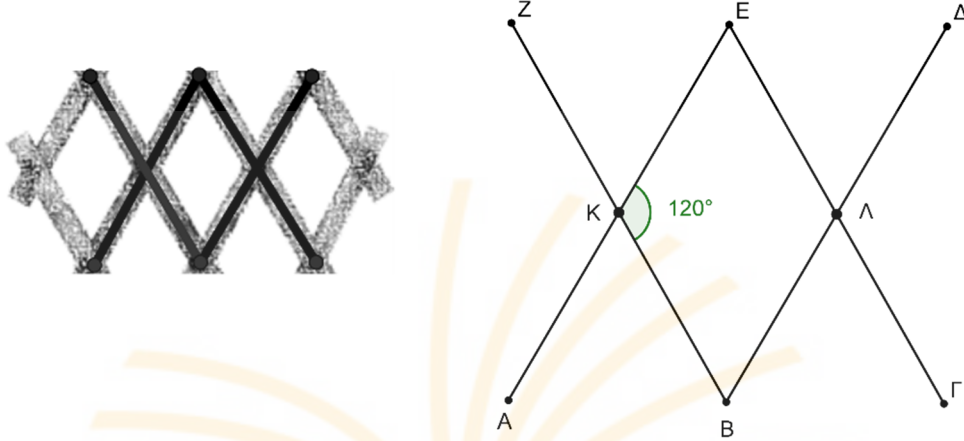
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta$, $B E$ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = 2E\Delta$, (Μονάδες 7)
 β) $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$, (Μονάδες 9)
 γ) $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$. (Μονάδες 9)



133. ΘΕΜΑ 13697

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα AE , BZ , BD και $ΓΕ$ αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel BD$ και $BZ \parallel ΓΕ$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE , BZ και Λ κοινό μέσο των BD , $ΓΕ$.

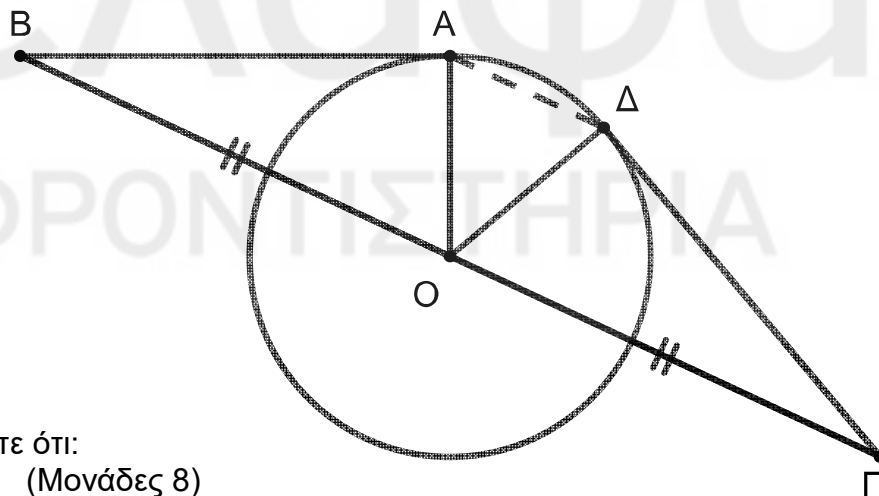


Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K , η γωνία BKE , είναι ίση με 120° .

- α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AKB} = \widehat{KBL} = \widehat{BL\Gamma} = 60^\circ$. (Μονάδες 9)
- β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και $BL\Gamma$ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)

134. ΘΕΜΑ 13750

Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O , R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $OG = BO$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα.



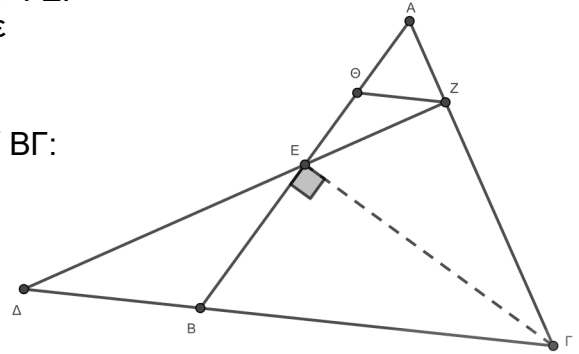
- α) Να αποδείξετε ότι:
- $AB = \Delta\Gamma$ (Μονάδες 8)
 - $A\Delta \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 10)
- β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $AO\Delta$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

135. ΘΕΜΑ 37097

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE .
 Στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε
 σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.

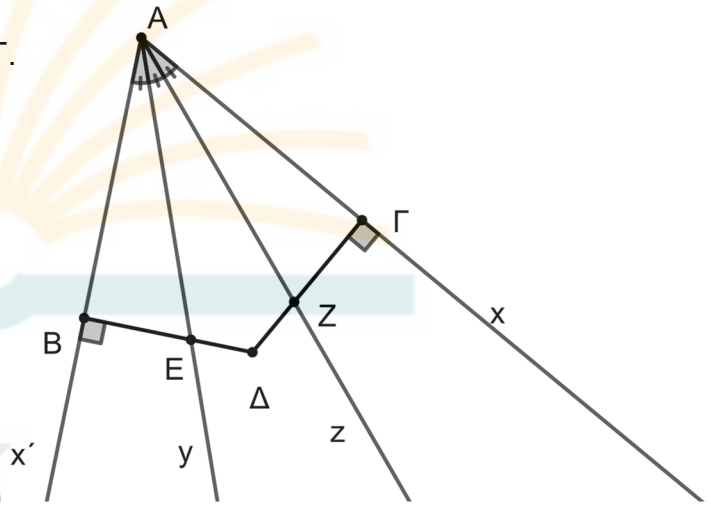
Αν η ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$
 είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$
 είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του
 τριγώνου ΘEZ . (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$. (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$. (Μονάδες 5)

**136. ΘΕΜΑ 37125**

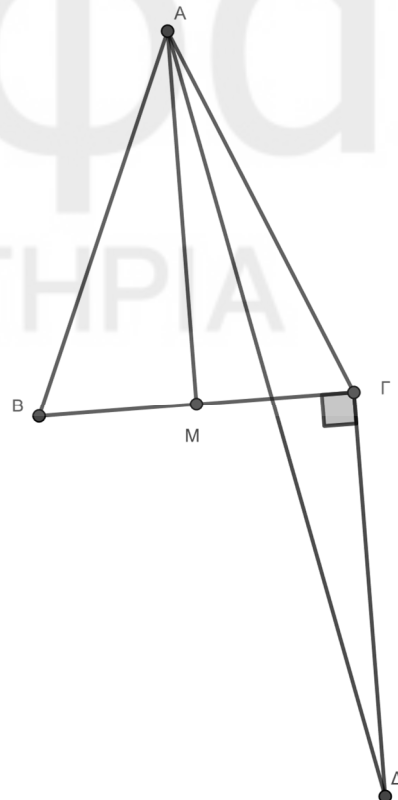
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'Ax$
 θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$.
 Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία
 B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ .
 Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη
 γωνία $x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και
 τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία
 E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.
 (Μονάδες 8)
- β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της
 γωνίας $x'Ax$. (Μονάδες 8)
- γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.
 (Μονάδες 9)

**137. ΘΕΜΑ 37164**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)
 και M το μέσο της $B\Gamma$.
 Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$
 (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$).
 Να αποδείξετε ότι:

- α) $AM \parallel \Gamma\Delta$.
 (Μονάδες 6)
- β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.
 (Μονάδες 7)
- γ) $\widehat{\Delta A \Gamma} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$.
 (Μονάδες 7)
- δ) $A\Delta < 2AB$.
 (Μονάδες 5)



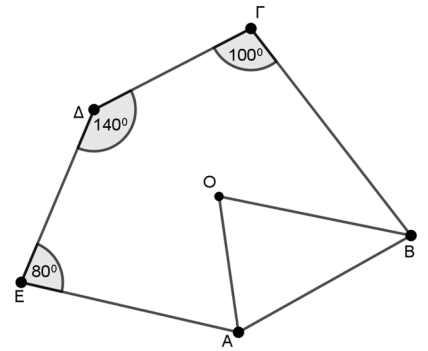
§4.8 - Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

ΘΕΜΑ 2°

138. ΘΕΜΑ 12640

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

- α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 12)
β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 13)



139. ΘΕΜΑ 12644

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο, τότε να υπολογίσετε:

- α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)

- β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 9)

- γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)

140. ΘΕΜΑ 13619

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με

$$\hat{A}_{\text{εξ}} = 100^\circ \text{ και } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ.$$

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

- β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{BO\Gamma} = 70^\circ$. (Μονάδες 15)

141. ΘΕΜΑ 13749

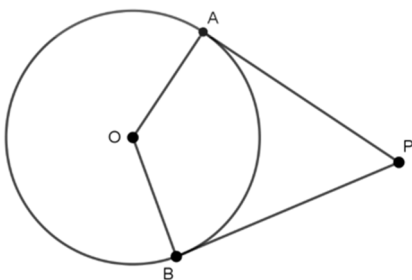
Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$. (Μονάδες 8)

- β) Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 8)

- γ) Τη γωνία $\hat{\varphi}$. (Μονάδες 9)

142. ΘΕΜΑ 34315



Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο Ρ.

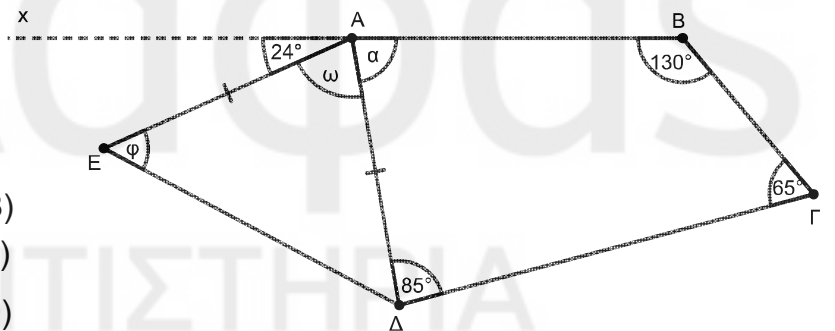
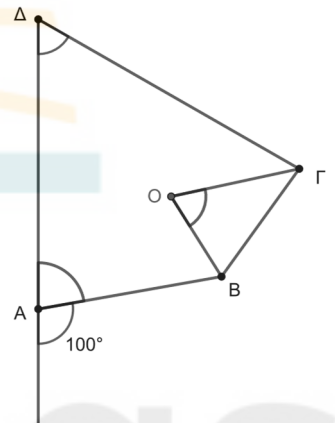
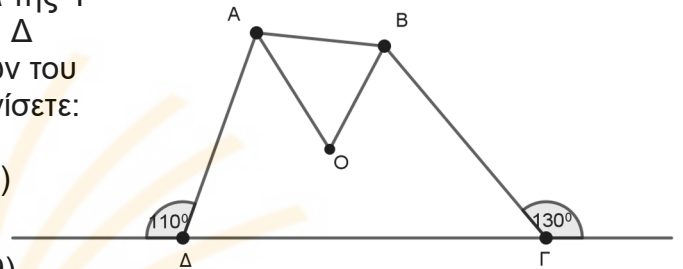
Έστω ΡΑ, ΡΒ τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το Ρ, τα σημεία επαφής τους Α, Β με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $\hat{APB}$ να ισούται με 60° .

- α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ είναι ίσο με 120° . (Μονάδες 7)

- β) Αν ΡΟ η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε να υπολογίσετε:

- i. το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ, (Μονάδες 9)

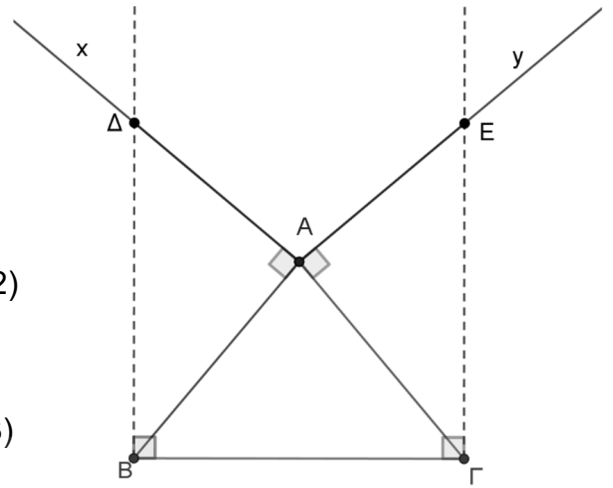
- ii. το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)



143. ΘΕΜΑ 34422

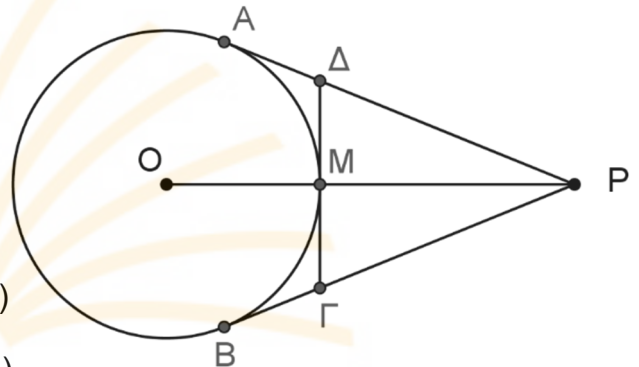
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay , τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο σχήμα. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)
 β) Αν η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία A , E και Δ . (Μονάδες 13)

**144. ΘΕΜΑ 36114**

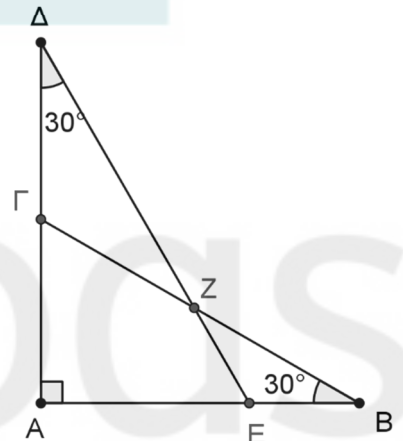
Δίνεται κύκλος κέντρου O , και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)
 β) Αν η γωνία APB είναι 40° , να υπολογίσετε τη γωνία AOB . (Μονάδες 12)

**145. ΘΕΜΑ 36117**

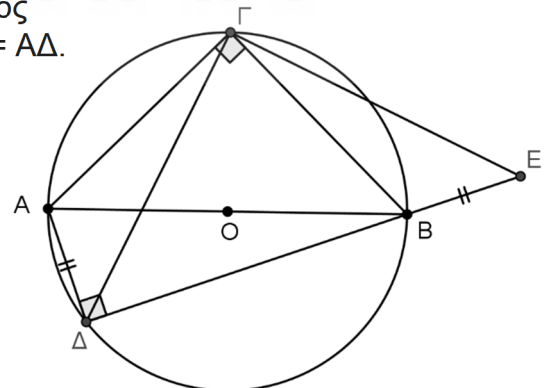
Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει για τις γωνίες $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\epsilon Z\Gamma$. (Μονάδες 13)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και $E B Z$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 4°****146. ΘΕΜΑ 34316**

Δίνεται κύκλος κέντρου O και διάμετρος του AB . Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Delta}B = 90^\circ$. Στην προέκταση της ΔB προς το μέρος του B θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = A\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}E$ είναι ίσες, (Μονάδες 6)
 ii. τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\epsilon\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 7)
 iii. η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE . (Μονάδες 6)
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτόμενη του κύκλου. (Μονάδες 6)



§5.2 – Παραλληλόγραμμα

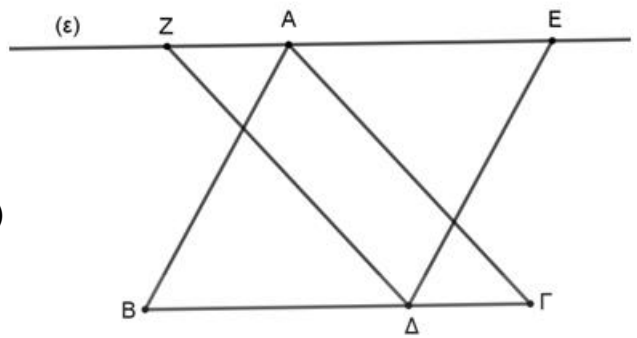
ΘΕΜΑ 2°

147. ΘΕΜΑ 13755

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

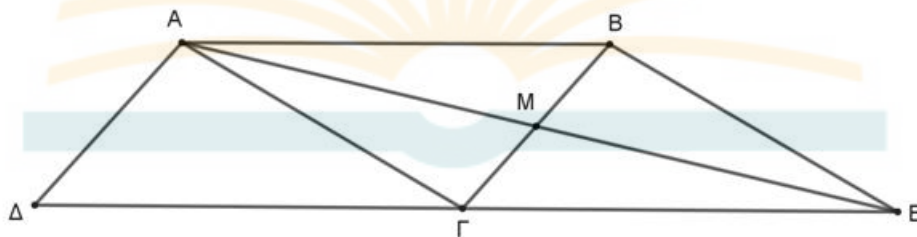
- α) τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)
 β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



148. ΘΕΜΑ 13816

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $AD < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι :

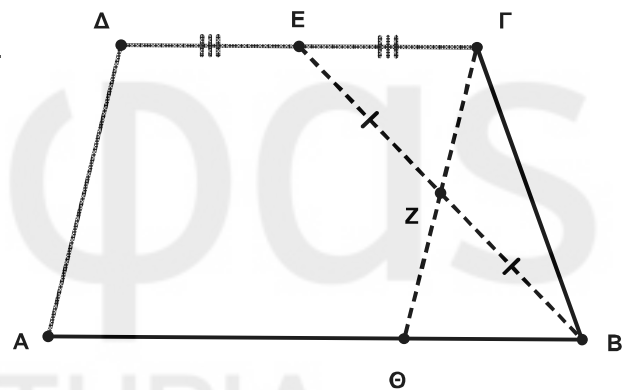
- α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
 β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)



149. ΘΕΜΑ 13824

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
 β) $E\Gamma = \Theta B$. (Μονάδες 5)
 γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



150. ΘΕΜΑ 13825

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)
 β) $\Delta A = AE$. (Μονάδες 13)

151. ΘΕΜΑ 13829

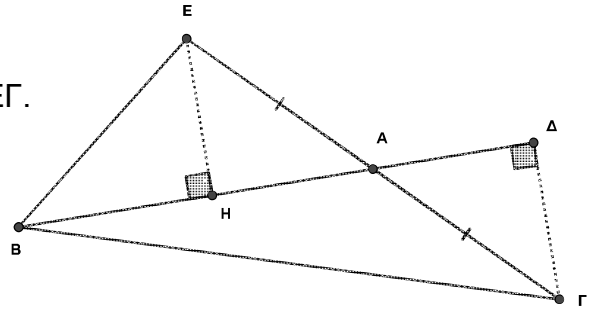
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

152. ΘΕΜΑ 13833

Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το $E\text{H}$ είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BE\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι $AH = A\Delta$. (Μονάδες 5)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta E\text{H}$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

**153. ΘΕΜΑ 13834**

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma\text{H} = B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και $EM\text{H}$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\text{H}EZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

154. ΘΕΜΑ 34386

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
 γ) η $A\text{H}$ είναι διάμεσος του BAE τριγώνου. (Μονάδες 9)

155. ΘΕΜΑ 34388

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.

- α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 13)
 β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

156. ΘΕΜΑ 34389

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $B\Delta$.

Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

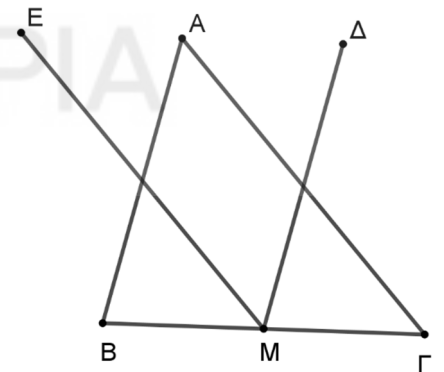
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔDE και ΓBZ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\text{E}\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

157. ΘΕΜΑ 34391

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$, στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$, φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta A = AE$ (Μονάδες 8)
 β) Τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)
 γ) $\Delta E = B\Gamma$ (Μονάδες 8)

**158. ΘΕΜΑ 34394**

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
 β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

159. ΘΕΜΑ 34395

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = BZ$

(Μονάδες 12)

β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

160. ΘΕΜΑ 34423

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

(Μονάδες 15)

161. ΘΕΜΑ 34425

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου MD του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E , ώστε $MD = DE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

(Μονάδες 13)

162. ΘΕΜΑ 34783

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$.

Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

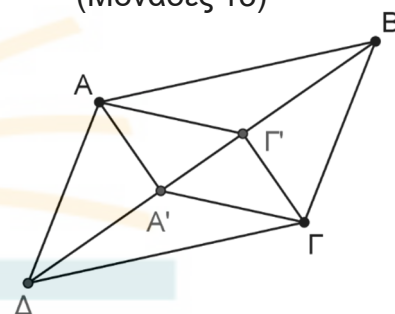
(Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$

(Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

**163. ΘΕΜΑ 36089**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AED και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

164. ΘΕΜΑ 36090

Στις πλευρές AD και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$, (Μονάδες 8)

β) $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$, (Μονάδες 8)

γ) $BH = \Theta\Delta$ (Μονάδες 9)

**165. ΘΕΜΑ 36096**

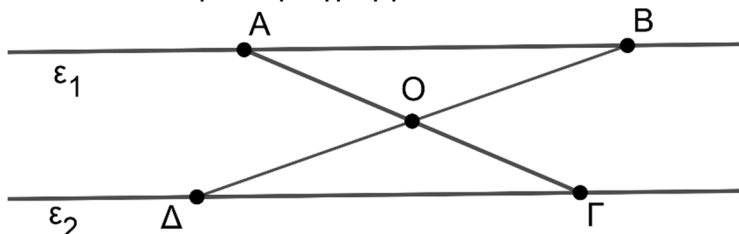
Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A, B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 , ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AOB και ΓOD είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



166. ΘΕΜΑ 36105

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ κάθετους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

167. ΘΕΜΑ 36115

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$. (A, E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

168. ΘΕΜΑ 36164

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$.

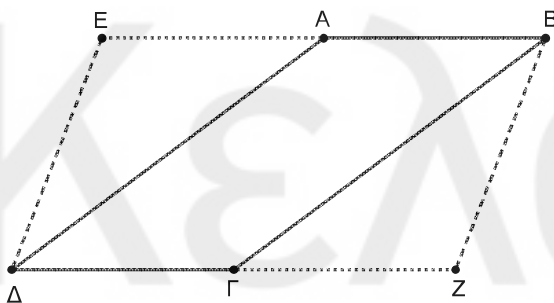
Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

β) $ME = M\Gamma$

(Μονάδες 13)

169. ΘΕΜΑ 36225

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

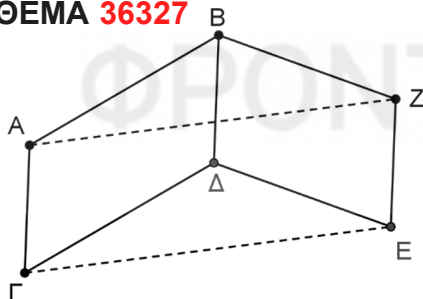
α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι

παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

170. ΘΕΜΑ 36327

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

(Μονάδες 12)

171. ΘΕΜΑ 36348

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Θεωρούμε κάθετες ακτίνες $OA, O\Gamma$

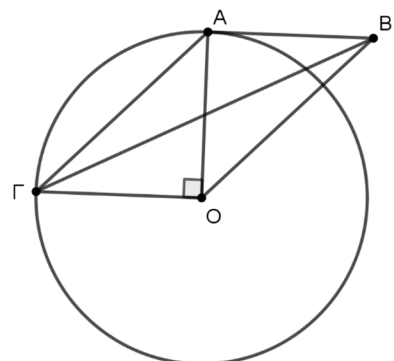
και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB , με $AB = O\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$.

(Μονάδες 15)



172. ΘΕΜΑ 37008

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

173. ΘΕΜΑ 37015

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$.

Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3°**174. ΘΕΜΑ 11897**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = GE$. (Μονάδες 9)

β) Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

γ) $\hat{B} + \hat{BAM} = \hat{GE\Delta}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4°**175. ΘΕΜΑ 1709**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας. Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ , τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

176. ΘΕΜΑ 1730

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1 : Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2 : $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ισχυρισμός 3 : Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και B .

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

177. ΘΕΜΑ 1746

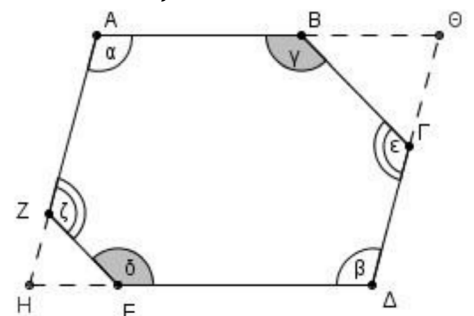
Στο κυρτό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ ισχύουν τα εξής : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές AZ και ΔE προεκτείνόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ προεκτείνόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες A και H είναι παραπληρωματικές, (Μονάδες 10)

ii. το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



178. ΘΕΜΑ 1731

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $ΓΔ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1 : Το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2 : Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3 : Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ισοσκελή.

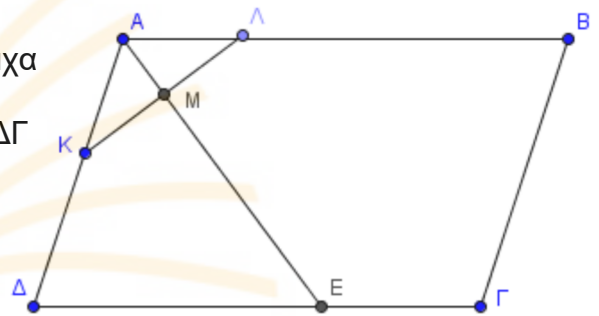
- α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)
- β) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

179. ΘΕΜΑ 1785

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$, με $AB > AD$.

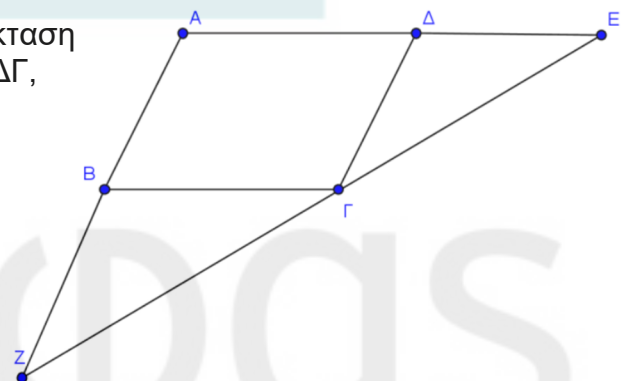
Θεωρούμε σημεία $K, Λ$ των AD και AB αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω M το μέσο του $KΛ$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $ΔΓ$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) $AD = DE$. (Μονάδες 8)
- β) $BΓ + ΓE = AB$. (Μονάδες 10)
- γ) $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A} \hat{K}$. (Μονάδες 7)

**180. ΘΕΜΑ 1805**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και στην προέκταση της AD θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $DE = ΔΓ$, ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = BΓ$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- $B\hat{Z} = \hat{Δ}E$. (Μονάδες 10)
 - τα σημεία $Z, Γ, E$ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
- β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία $Z, Γ, E$ είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον



παρακάτω συλλογισμό: «Έχουμε $B\hat{Z} = \hat{Δ}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΔE$ και $BΓ$ που τέμνονται από τη ZE) και $B\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Δ}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΔE$ και $BΓ$ που τέμνονται από την $ΔΓ$). Όμως $\hat{Δ}ΓE + Γ\hat{Δ}E + \hat{Δ}E = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $ΔEΓ$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα $\hat{Δ}ΓE + B\hat{Γ}Δ + B\hat{Γ}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία $Z, Γ, E$ είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό.

Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

(Μονάδες 5)

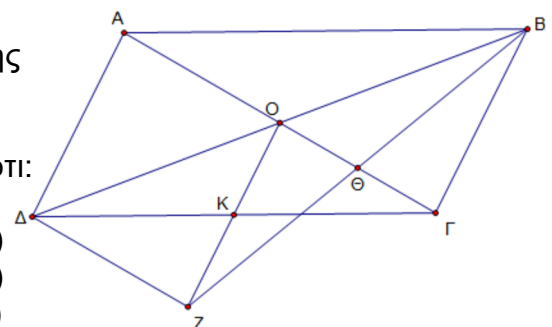
181. ΘΕΜΑ 1877

Έστω παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $ΓΔ$.

Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$.

Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $ΑΓ$ στο $Θ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα $ΟΓ$ και BZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)
- β) $AO = ΔZ$. (Μονάδες 9)
- γ) Τα τρίγωνα AOB και $ΔΖΓ$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



182. ΘΕΜΑ 1810

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα MD ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε το ερώτημα αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά στους μαθητές του, ένας από αυτούς έκανε το διπλανό σχήμα και απάντησε ως εξής:

$\hat{A}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{Z}\hat{A}\hat{B}$ (εντός εναλλάξ των $AB \parallel MD$ που τέμνονται από AZ).

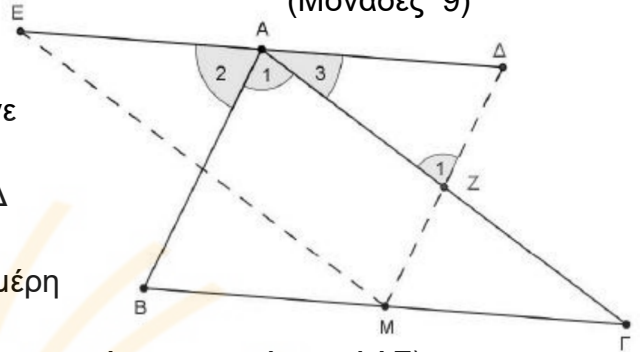
$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{E}\hat{A}\hat{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB \parallel MD$ που τέμνονται από DE).

Όμως $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} + \hat{A}\hat{Z}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔAZ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{E}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} = 180^\circ$.

Οπότε Δ, E, A συνευθειακά. Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

(Μονάδες 6)

**183. ΘΕΜΑ 13845**

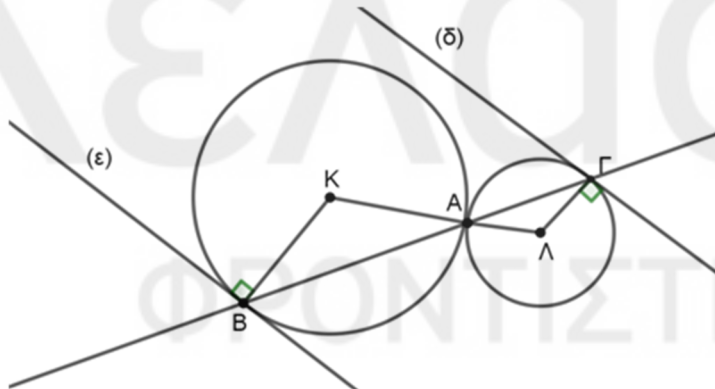
Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ .

Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{K}\hat{B}\hat{A} = \hat{\Lambda}\hat{\Gamma}\hat{A}$. (Μονάδες 8)

β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**184. ΘΕΜΑ 37102**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$).

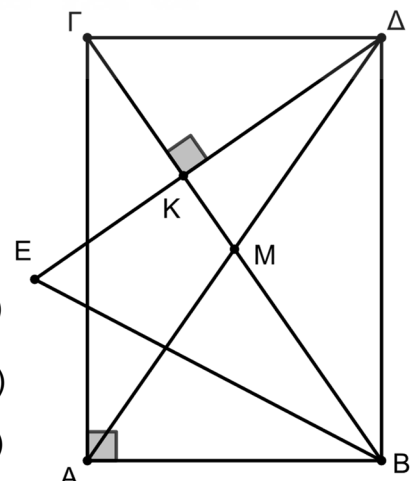
Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $MD = AM$.

Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

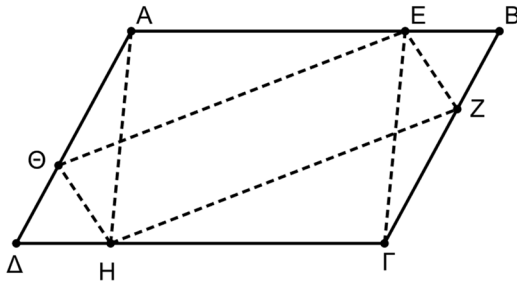
β) $\hat{K}\hat{E}\hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = B\Delta$. (Μονάδες 9)



185. ΘΕΜΑ 37108

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$.
Να αποδείξετε ότι:



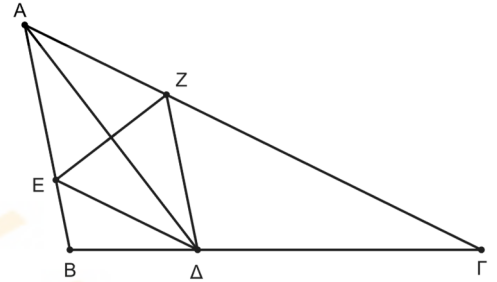
- α) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
γ) Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 9)

186. ΘΕΜΑ 37117

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔZ παράλληλη στην AB .

Να αποδείξετε ότι:

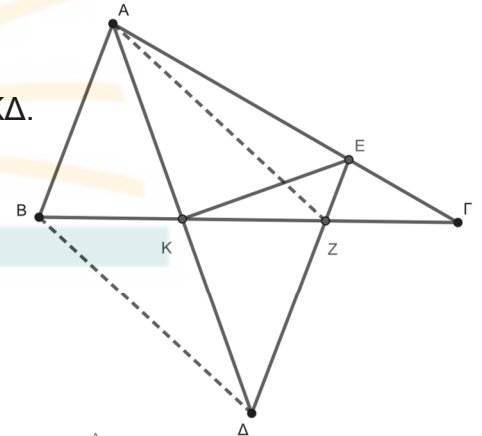
- α) Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)
β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
γ) Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

**187. ΘΕΜΑ 37131**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Η EK είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$. (Μονάδες 6)
γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

**188. ΘΕΜΑ 37160**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $A\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο K και την προέκταση της EM στο Λ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AEM, MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)
β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

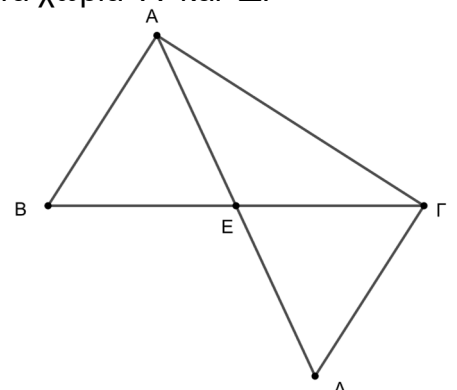
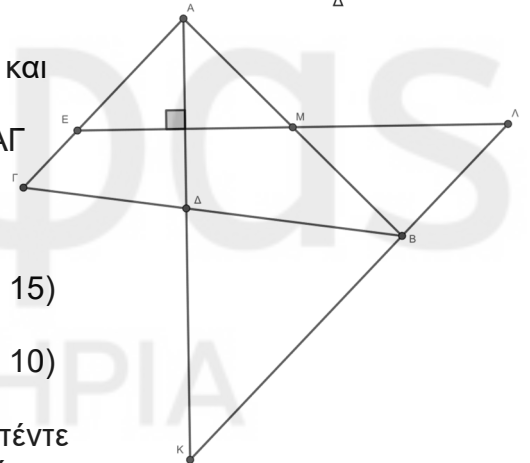
189. ΘΕΜΑ 37166

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν.

Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ . (Μονάδες 5)
ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)
iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από το δρόμο $A\Delta$. (Μονάδες 8)
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ . (Μονάδες 7)



§5.3 – Ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 2°

190. ΘΕΜΑ 34781

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

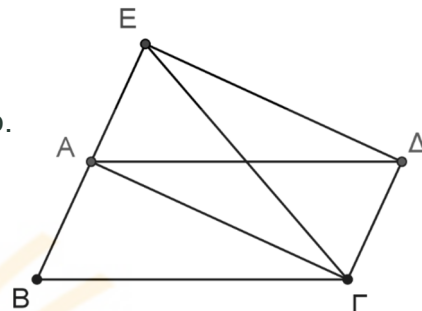
191. ΘΕΜΑ 36175

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE . (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 8)

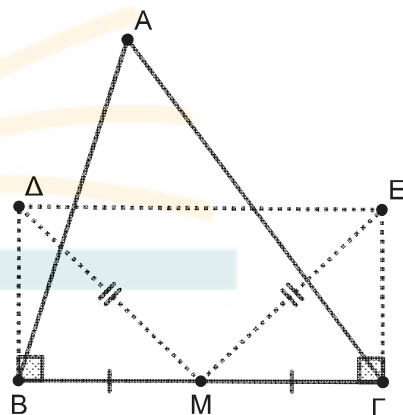


192. ΘΕΜΑ 36339

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



193. ΘΕΜΑ 36353

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο με κορυφές A, Γ, B και Δ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

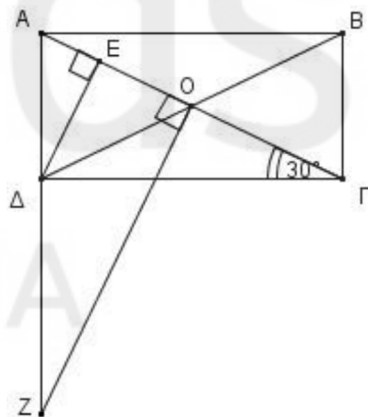
ΘΕΜΑ 4°

194. ΘΕΜΑ 1729

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\Delta\Gamma$ χωρίζεται από το ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



195. ΘΕΜΑ 1733

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$. (Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

196. ΘΕΜΑ 1800

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH .

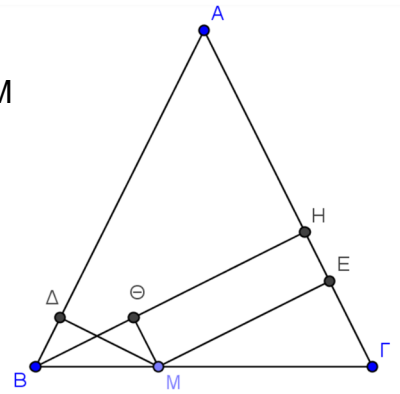
Από το M φέρουμε κάθετες MD , ME και $M\Theta$

στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) $B\Theta = \Delta M$. (Μονάδες 9)

γ) $MD + ME = BH$. (Μονάδες 7)

**197. ΘΕΜΑ 1816**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$.

Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$.

Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B .

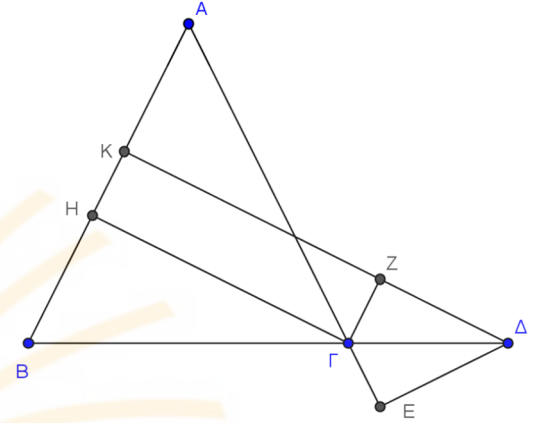
(Μονάδες 4)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$.

(Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$. (Μονάδες 8)

**198. ΘΕΜΑ 1879**

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB .

Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της.

Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $K\Gamma O E$ είναι παραλληλόγραμμο.

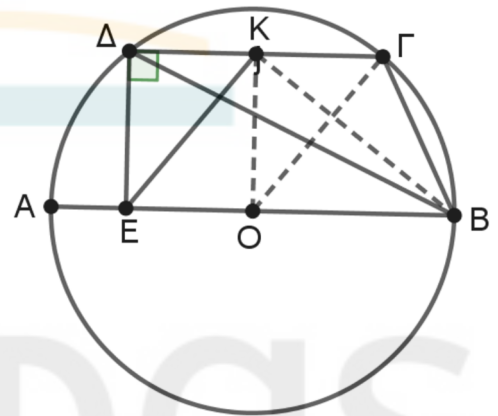
(Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{E}K = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$.

(Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$.

(Μονάδες 5)

**199. ΘΕΜΑ 13699**

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A .

Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ . (Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

200. ΘΕΜΑ 13746

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημίθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν. (Μονάδες 8)

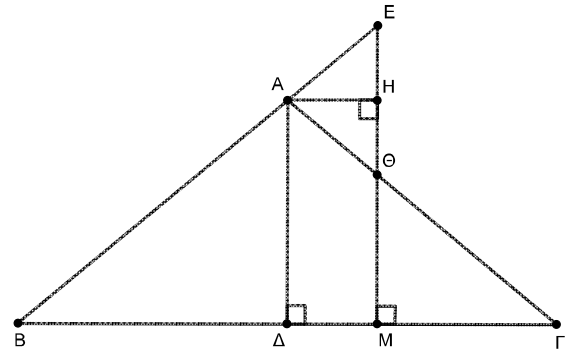
β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

201. ΘΕΜΑ 14887

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$),
και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$.
Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην
πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$
στα σημεία E και Θ αντίστοιχα.

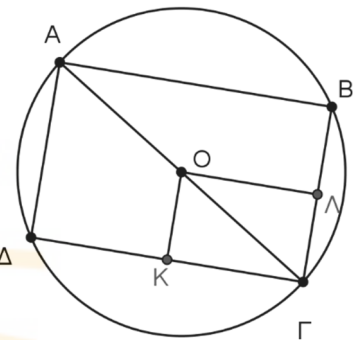
Αν AD και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και
 $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) $\angle \hat{A}H = 90^\circ$. (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
γ) $M\Theta + ME = 2AD$. (Μονάδες 9)

**202. ΘΕΜΑ 34326**

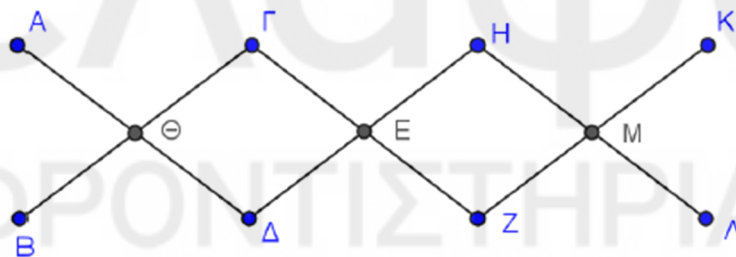
Έστω κύκλος κέντρου O και $A\Gamma$ μια διάμετρος του.
Θεωρούμε δυο ίσες χορδές $AD, B\Gamma$ και χορδές $\Delta\Gamma, AB$
τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις $AD, B\Gamma$ αντίστοιχα.
Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

- α) οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες, (Μονάδες 7)
β) το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 7)
γ) η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου, (Μονάδες 6)
δ) το τετράπλευρο $OK\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

**203. ΘΕΜΑ 37083**

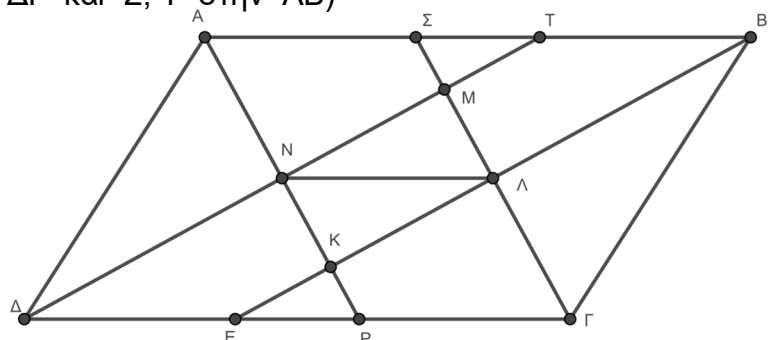
Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται
από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($AD, B\Gamma, \Gamma Z, \Delta H, ZK, H\Lambda$) που
είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά ($A, B, \Gamma, \Delta, \Theta, E, M, H, K, \Lambda, Z$).
Αν το σημείο Θ είναι μέσο των τμημάτων AD και $B\Gamma$ ενώ το σημείο E
είναι μέσο των τμημάτων ΓZ και ΔH , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $\Gamma H Z \Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
β) Τα σημεία B, Δ, Z είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

**204. ΘΕΜΑ 37167**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του
 $AP, BE, \Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB)
τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N
όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $\Delta E B T$ είναι
παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
β) το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι
ορθογώνιο (Μονάδες 8)
γ) $\Lambda N \parallel AB$. (Μονάδες 5)
δ) $\Lambda N = AB - AD$. (Μονάδες 5)

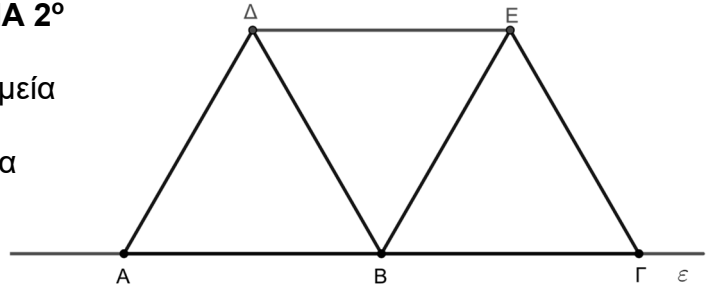


§5.4 – Ρόμβος

ΘΕΜΑ 2°

205. ΘΕΜΑ 13767

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ , έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta B E}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

206. ΘΕΜΑ 13832

Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Επίσης $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.

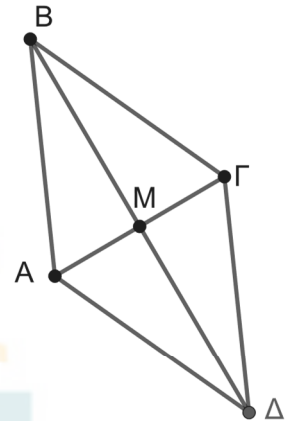
(Μονάδες 10)

ii. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

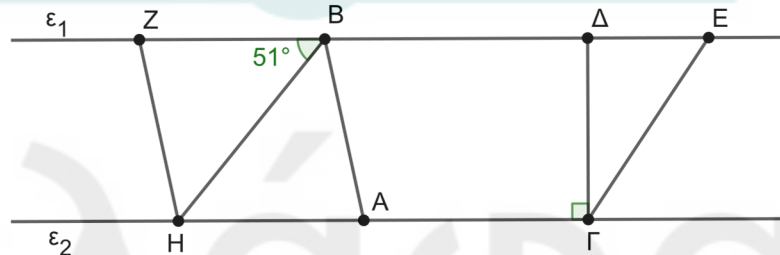
(Μονάδες 8)

β) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά AB του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

(Μονάδες 7)



207. ΘΕΜΑ 13842



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο $ABZH$ είναι ρόμβος.

Επίσης δίνονται οι γωνίες $B\hat{A}H = 78^\circ$, $Z\hat{B}H = 51^\circ$ και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 8)

γ) Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

(Μονάδες 10)

208. ΘΕΜΑ 34498

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$.

Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$.

Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

209. ΘΕΜΑ 34504

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι

παράλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

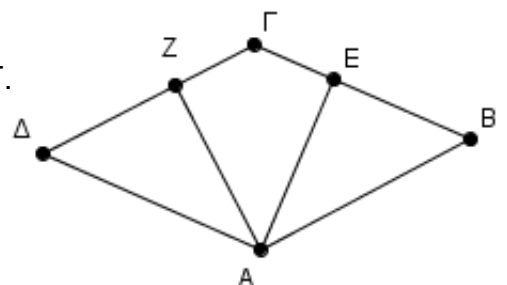
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παράλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

(Μονάδες 12)

β) Αν για το παράλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)



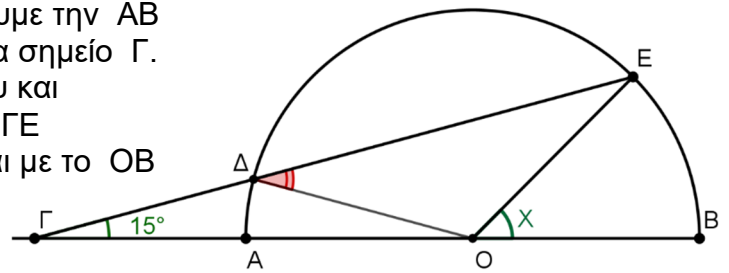
210. ΘΕΜΑ 34505

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος GE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB

και η γωνία $\widehat{B\Gamma E}$ είναι 15° , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{ODE} = 30^\circ$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{EOB} = x$. (Μονάδες 12)

**211. ΘΕΜΑ 34513**

Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

212. ΘΕΜΑ 36107

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΓΒ$. Φέρουμε από την κορυφή A ευθεία (ϵ) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την (ϵ) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

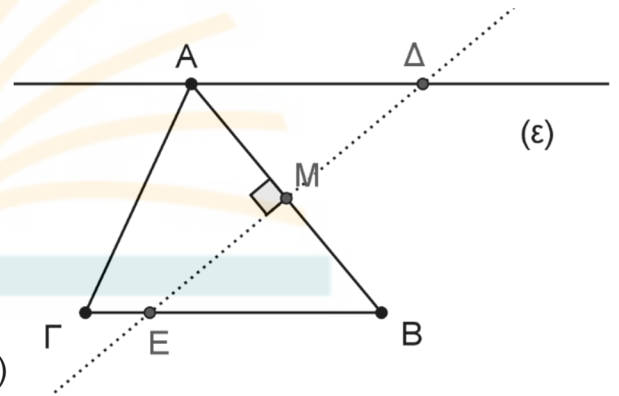
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

(Μονάδες 6)

β) Αν M το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΕΜΒ$.

(Μονάδες 10)

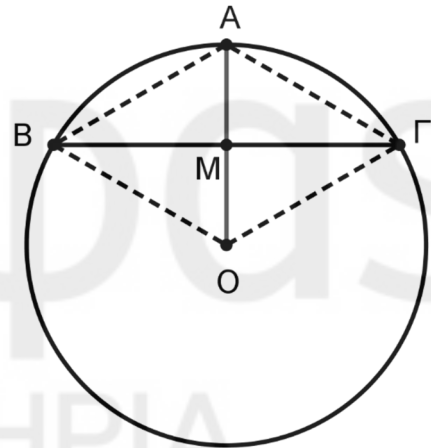
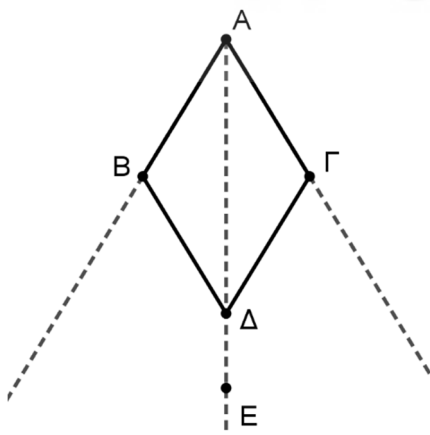
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

**213. ΘΕΜΑ 36349**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΓΟΒ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ΑΓΟΒ$. (Μονάδες 15)

**214. ΘΕΜΑ 36351**

Δίνεται ρόμβος $ΑΒΔΓ$.

Στην προέκταση της διαγωνίου $ΑΔ$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $ΑΓ$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ . (Μονάδες 15)

215. ΘΕΜΑ 37011

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε

$$AB = AD = \frac{1}{2} \Gamma\Delta, \hat{A} = 60^\circ \text{ και}$$

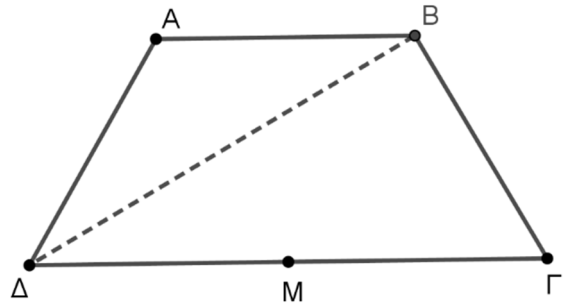
M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η διαγώνιος ΔB του τραpezίου είναι

διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, (Μονάδες 9)

β) η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)

**ΘΕΜΑ 4°****216. ΘΕΜΑ 1740**

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π_1 και Π_2 :

Π_1 : Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π_2 : Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π_1 και Π_2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

217. ΘΕΜΑ 1767

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με

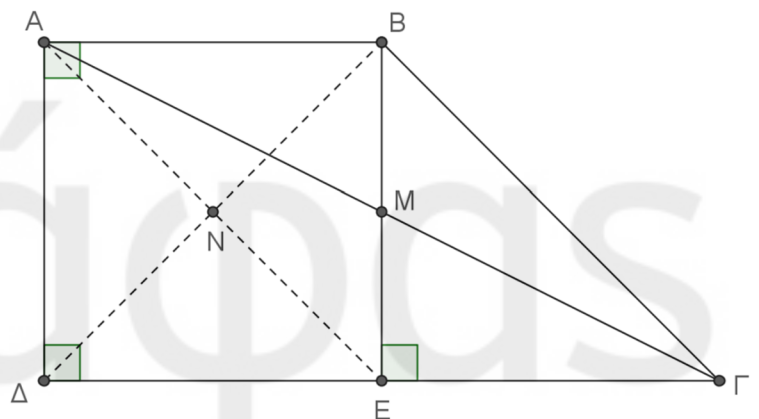
$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ, \Delta\Gamma = 2AB \text{ και } \hat{B} = 3\hat{\Gamma}.$$

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M. Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) $AE \perp B\Delta$. (Μονάδες 9)

**218. ΘΕΜΑ 1823**

Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B.

Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B

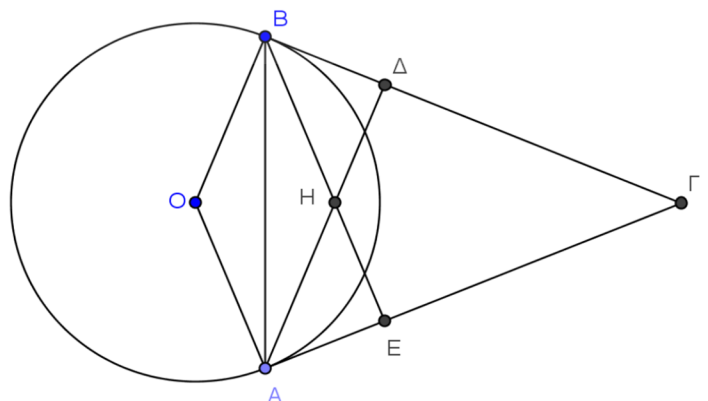
οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.

Φέρουμε επίσης και τα ύψη AD και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



219. ΘΕΜΑ 13857

- α) Στο σχήμα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M .
Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

- β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

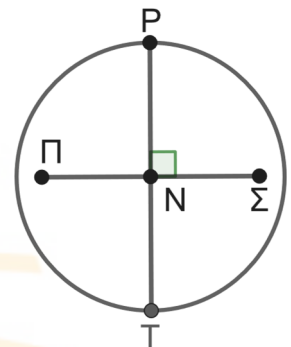
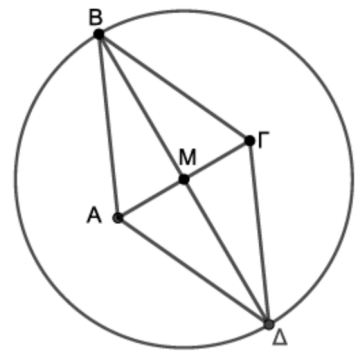
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 10)

- γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $ΠΣ$ τέμνονται κάθετα στο N και $ΠN = NΣ$.

Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N .
Να αποδείξετε ότι $ΠP = PΣ = ΣT = TΠ$.

(Μονάδες 7)

**220. ΘΕΜΑ 37109**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

- β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

- γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AN\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

221. ΘΕΜΑ 37141

Δίνεται τρίγωνο με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των $A\Delta$ και $A\Gamma$ καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\Delta A \epsilon$.

- α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\epsilon$.

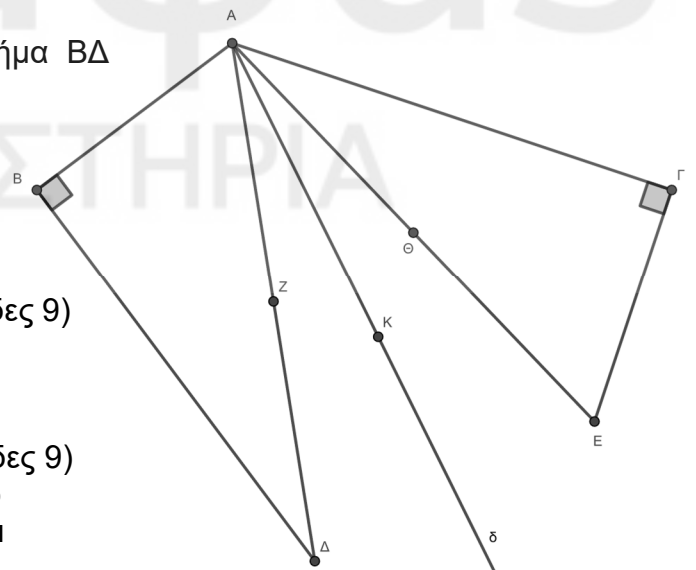
(Μονάδες 9)

- β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ .

(Μονάδες 9)

- γ) Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)



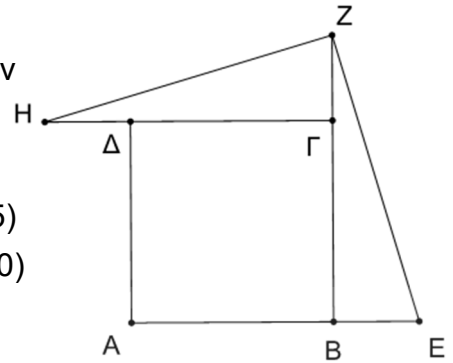
§5.5 – Τετράγωνο

ΘΕΜΑ 2°

222. ΘΕΜΑ 13536

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

- α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$. (Μονάδες 15)
 β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{EZH} = 90^\circ$. (Μονάδες 10)



223. ΘΕΜΑ 14883

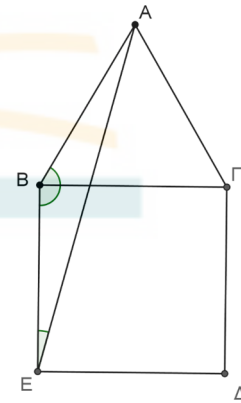
Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)
 β) Τι είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$, αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

224. ΘΕΜΑ 36173

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες
 i. $\hat{A}\hat{B}E$ (Μονάδες 8)
 ii. $\hat{B}\hat{E}A$ (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

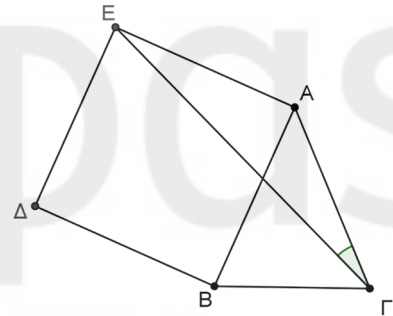


225. ΘΕΜΑ 36174

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
 β) $2\hat{E}\hat{A} = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 15)

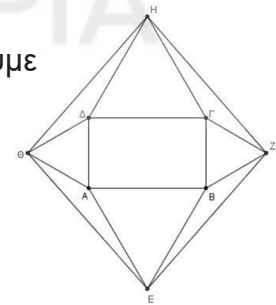


ΘΕΜΑ 4°

226. ΘΕΜΑ 1734

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

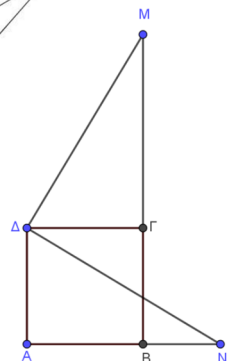
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)
 β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



227. ΘΕΜΑ 1750

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BN = AB$ και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$. Να αποδείξετε ότι:

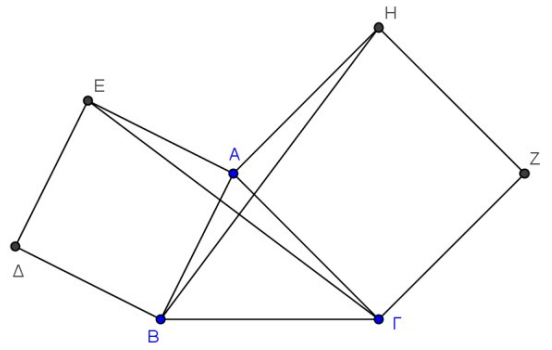
- α) $\Delta N = \Delta M$. (Μονάδες 12)
 β) $\Delta N \perp \Delta M$. (Μονάδες 13)



228. ΘΕΜΑ 1788

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $ABDE$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι:

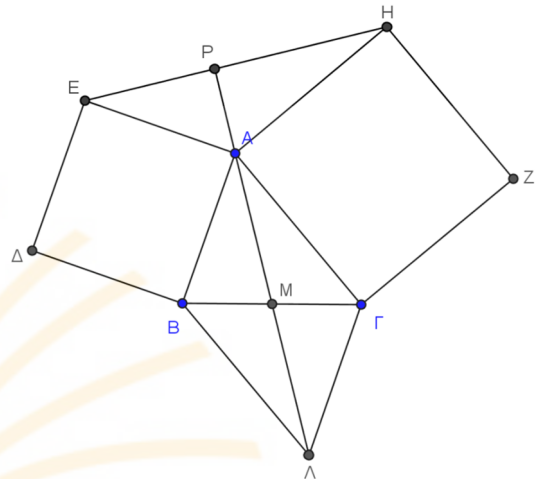
- α) $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$. (Μονάδες 8)
 β) $E\Gamma = BH$. (Μονάδες 9)
 γ) $E\Gamma \perp BH$. (Μονάδες 8)

**229. ΘΕΜΑ 1795**

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $ABDE$ και $A\Gamma ZH$.

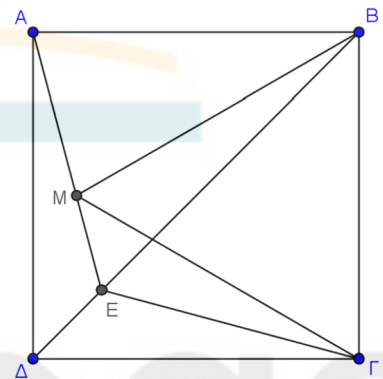
Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM , τέτοιο ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

- α) $\Gamma\Lambda = AE$. (Μονάδες 10)
 β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda$ και EAH είναι ίσες. (Μονάδες 10)
 γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH . (Μονάδες 5)

**230. ΘΕΜΑ 1814**

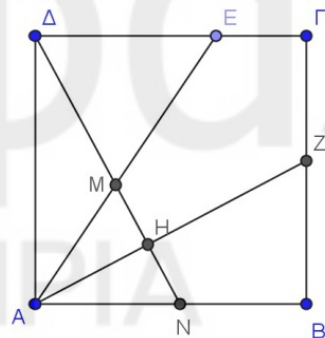
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει την $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{\Delta AE} = 15^\circ$. (Μονάδες 8)
 β) Τα τρίγωνα ΔAE και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma M$. (Μονάδες 9)

**231. ΘΕΜΑ 1825**

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και την ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $A\Delta N$ και ABZ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 β) $AM = AN$ και $\Delta E = EM$. (Μονάδες 10)
 γ) $AZ = \Delta E + BZ$. (Μονάδες 7)

**232. ΘΕΜΑ 13744**

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z , τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες.
 ii. Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα. (Μονάδες 18)
 β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB . (Μονάδες 7)

233. ΘΕΜΑ 13841

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, BD η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $BE = E\Delta$. (Μονάδες 7)
 β) Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$. (Μονάδες 8)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)
 δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

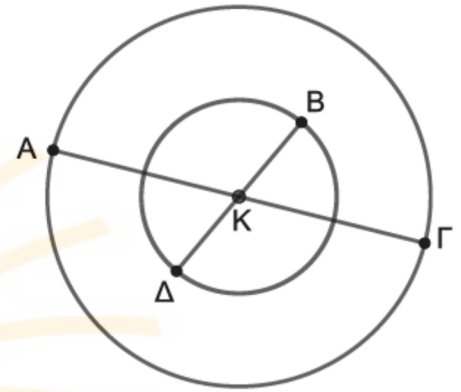
234. ΘΕΜΑ 13848

Στο σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο K και οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διάμετροί τους.

α) Αν ισχύει $A\Gamma > B\Delta$:

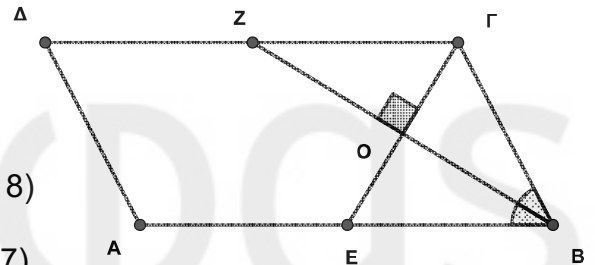
- i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις $A\Gamma$ και $B\Delta$, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

- β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**235. ΘΕΜΑ 13850**

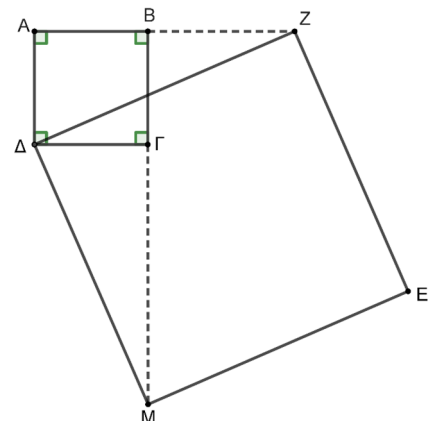
Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Φέρουμε ΓO κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE είναι ίσα. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
 δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)

**236. ΘΕΜΑ 34336**

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα και οι γωνίες $\hat{A\Delta Z}$ και $\hat{\Gamma\Delta M}$ είναι ίσες, (Μονάδες 9)
 β) το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)
 γ) οι γωνίες $B\hat{Z}E$ και $E\hat{M}B$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)



§5.6 – Εφαρμογές στα τρίγωνα

ΘΕΜΑ 2°

237. ΘΕΜΑ 12639

Από το μέσο M της διαμέσου AD τριγώνου $AB\Gamma$, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) το Z είναι μέσο της $A\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) το AE ισούται με το $\frac{1}{4}$ του $A\Gamma$. (Μονάδες 15)

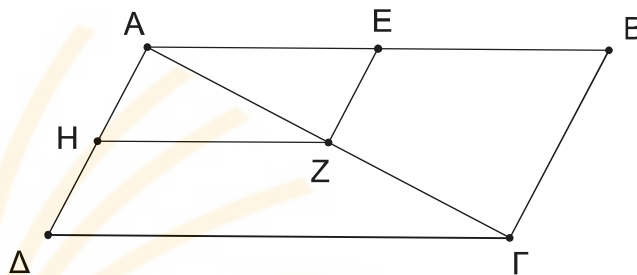
238. ΘΕΜΑ 13532

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και AD αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



239. ΘΕΜΑ 34332

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο

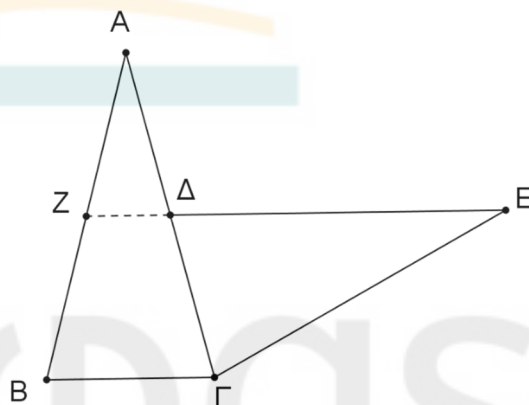
της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

Έστω Z το σημείο στο οποίο η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) το σημείο Z είναι το μέσο της AB . (Μονάδες 13)



240. ΘΕΜΑ 34393

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH = \Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Delta\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

241. ΘΕΜΑ 34398

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας του $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 9)

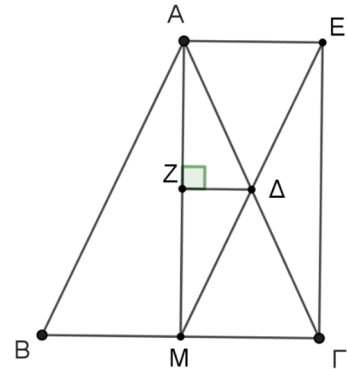
242. ΘΕΜΑ 34426

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ θεωρούμε τη διάμεσο $M\Delta$, την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα $\Delta E = \Delta M$. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα $\Delta Z \perp AM$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 13)

**243. ΘΕΜΑ 34494**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE . (Μονάδες 12)

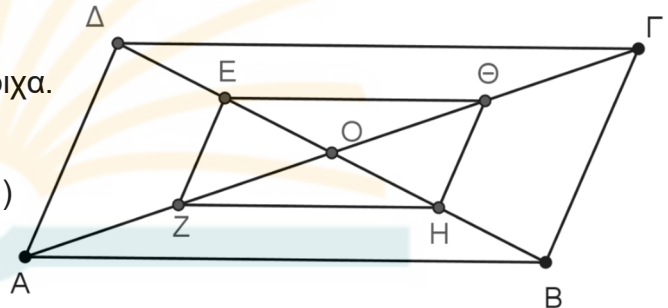
244. ΘΕΜΑ 34512

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E , Z , H , Θ τα μέσα των OD , OA , OB και OG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $E\Theta HZ$.

(Μονάδες 15)

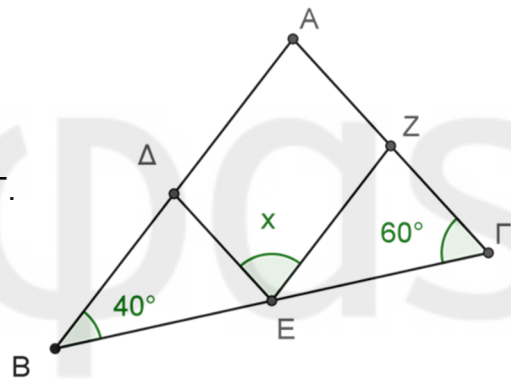
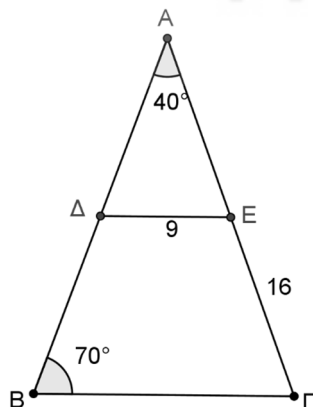
**245. ΘΕΜΑ 34768**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ και $ZE \parallel AB$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΔBE . (Μονάδες 8)

**246. ΘΕΜΑ 36088**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$.

Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

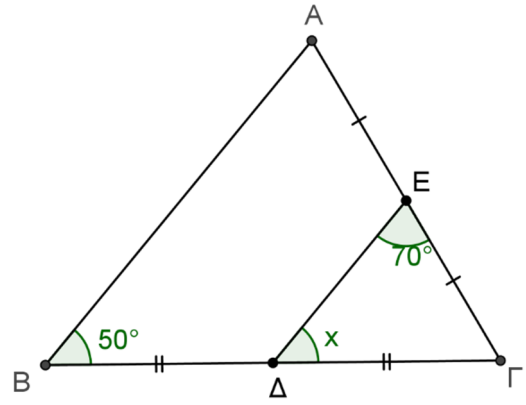
(Μονάδες 9)

247. ΘΕΜΑ 36091

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$.
 Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι
 τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα,
 τέτοια ώστε $\hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $DE \parallel AB$.
 (Μονάδες 8)

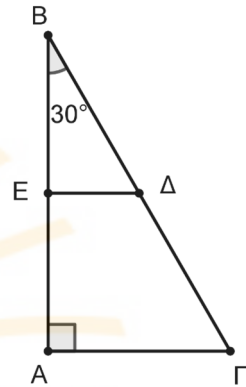
β) Να υπολογίσετε :
 i) τη γωνία $\hat{x}$. (Μονάδες 8)
 ii) τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (Μονάδες 8)

**248. ΘΕΜΑ 36342**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$
 και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ
 είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα
 με $ED = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

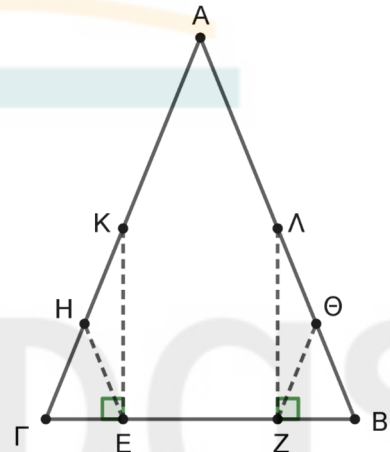
α) $A\Gamma$ (Μονάδες 8)
 β) $B\Gamma$ (Μονάδες 9)
 γ) $A\Delta$ (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**249. ΘΕΜΑ 36343**

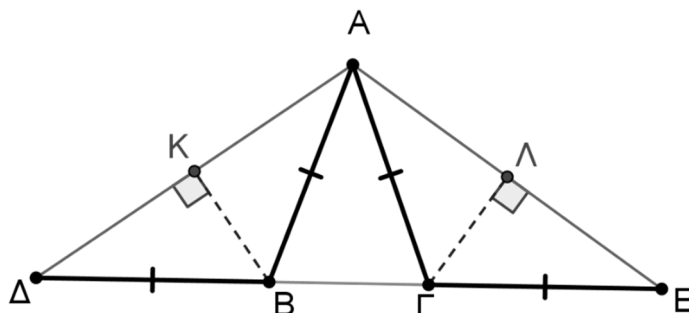
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.
 Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB
 αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα
 KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.
 Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle KE\Gamma$ και $\triangle \Lambda ZB$ είναι ίσα.
 (Μονάδες 15)
 β) $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων
 $K\Gamma, \Lambda B$ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

**250. ΘΕΜΑ 36356**

Θεωρούμε τρίγωνα $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$,
 έτσι ώστε τα σημεία Δ, B, Γ και E να είναι συνευθειακά.
 Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :
 i) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)
 ii) τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.
 (Μονάδες 8)
 β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.
 (Μονάδες 9)



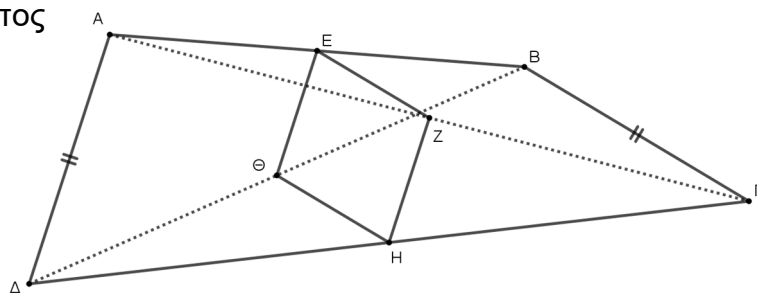
ΘΕΜΑ 3°

251. ΘΕΜΑ 11896

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος ισχύει ότι $AD = BG$ και τα σημεία E, Z, H και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων $AB, AG, \Gamma\Delta$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

- α) $EZ \parallel H\Theta$ (Μονάδες 15)
 β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



252. ΘΕΜΑ 12068

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και M το μέσο της υποτείνουσάς του $B\Gamma$. Από το M φέρουμε $M\Delta \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔZ .

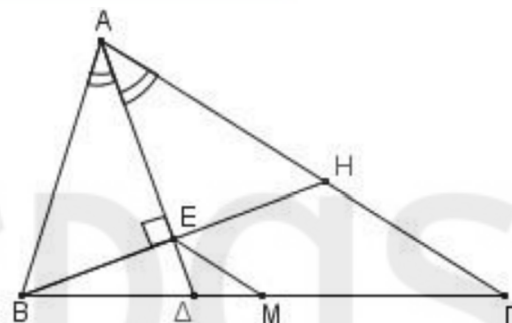
- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Το τρίγωνο MBZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 ii. Το τετράπλευρο $AMBZ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
 β) Αν το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το $AMBZ$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4°

253. ΘΕΜΑ 1723

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 β) $EM \parallel H\Gamma$. (Μονάδες 8)
 γ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$. (Μονάδες 8)



254. ΘΕΜΑ 1728

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

- α) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 β) $\hat{AED} = \hat{BZ\Gamma}$. (Μονάδες 8)
 γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)

255. ΘΕΜΑ 1741

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 15)
 β) Στην περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

256. ΘΕΜΑ 1743

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

Έστω ότι AE και AZ είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών

$\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

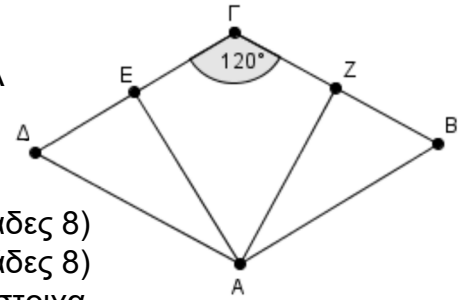
(Μονάδες 8)

ii. $AG \perp EZ$.

(Μονάδες 8)

β) Αν M και N τα μέσα των πλευρών AD και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

**257. ΘΕΜΑ 1745**

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$

και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

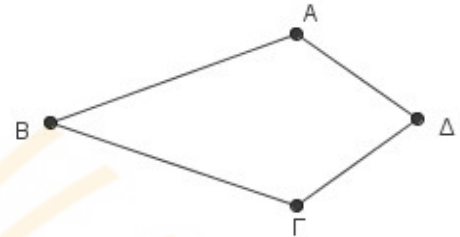
β) Οι διαγώνιοι του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$

τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

**258. ΘΕΜΑ 1766**

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω E το συμμετρικό

σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της AD .

Η προέκταση της $\Gamma\Delta$ τέμνει την AE στο H .

Να αποδείξετε ότι:

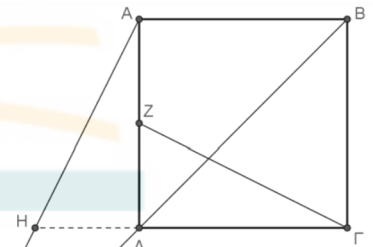
α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓZ είναι κάθετη στην AE .

(Μονάδες 8)

**259. ΘΕΜΑ 1773**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AD = B\Gamma$.

Αν E, Λ, Z, K, N, M είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EMZN$ ρόμβος.

(Μονάδες 8)

β) Η EZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος MN .

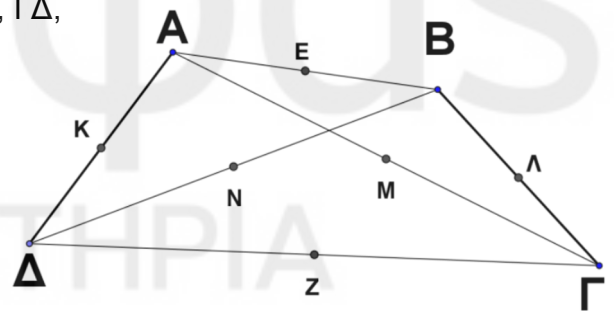
(Μονάδες 7)

γ) $KE = Z\Lambda$.

(Μονάδες 5)

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Lambda, MN, EZ$

διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)

**260. ΘΕΜΑ 1775**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θεωρούμε το μέσο M

της πλευράς AD και το $\Gamma E \perp MB$. Η παράλληλη

από την κορυφή Δ στην ευθεία MB ($\Delta x \parallel MB$)

τέμνει τις $B\Gamma$ και ΓE στα σημεία N, Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

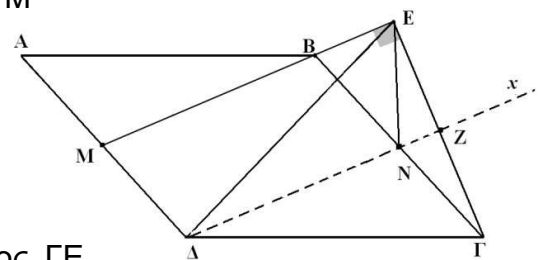
(Μονάδες 7)

β) Το σημείο Z είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓE .

(Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = \Delta\Gamma$.

(Μονάδες 9)



261. ΘΕΜΑ 1781

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$.

Στη διαγώνιο $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$.

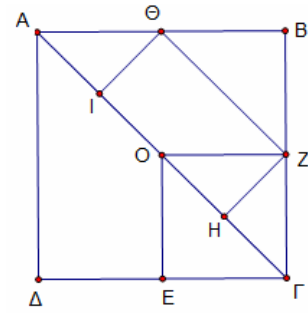
Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών

$\Delta\Gamma, AB$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$. (μονάδες 10)

**262. ΘΕΜΑ 1787**

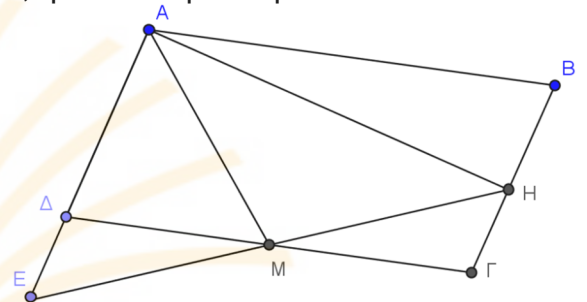
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία A αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H .

Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAB . (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα $EH, \Delta\Gamma$ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{E} = \hat{\Delta MA}$. (Μονάδες 8)

**263. ΘΕΜΑ 1794**

α) Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση. (Μονάδες 10)

264. ΘΕΜΑ 1798

α) Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου. (Μονάδες 12)

265. ΘΕΜΑ 1801

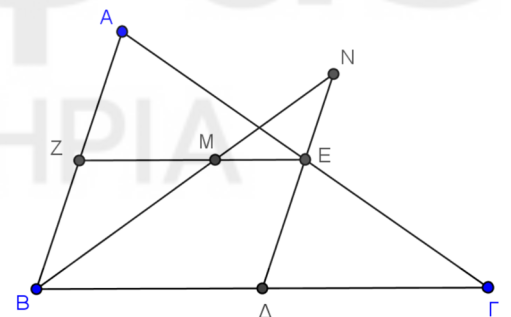
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα.

Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$. (Μονάδες 8)

**266. ΘΕΜΑ 1802**

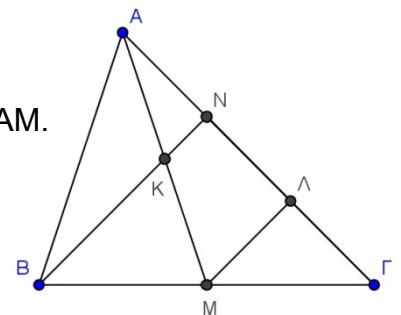
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσος του και K το μέσο του AM .

Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$. (Μονάδες 9)

β) $K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + A\hat{K}N$. (Μονάδες 9)

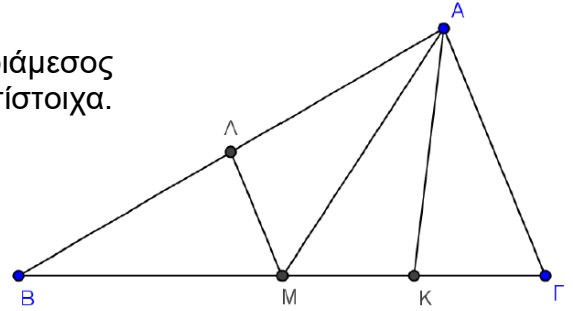
γ) $BK = 3KN$. (Μονάδες 7)



267. ΘΕΜΑ 1803

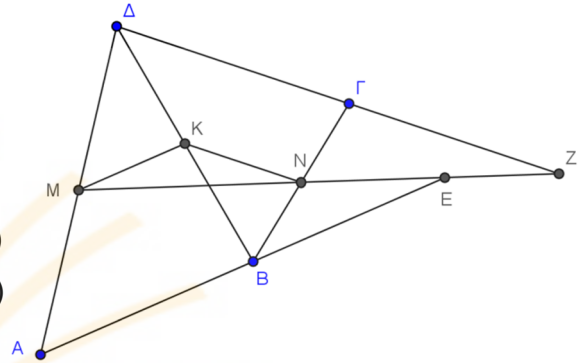
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$. (Μονάδες 7)
 β) $M\Lambda = MK$. (Μονάδες 9)
 γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛMK . (Μονάδες 9)

**268. ΘΕΜΑ 1804**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- α) $MK = KN$. (Μονάδες 13)
 β) $M\hat{E}A = M\hat{Z}\Delta$. (Μονάδες 12)

**269. ΘΕΜΑ 1898**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του $A\Delta$. Έστω E, Z και H είναι τα μέσα των $B\Delta, A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)
 γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH . (Μονάδες 5)

270. ΘΕΜΑ 13743

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$. (Μονάδες 5)
 β) Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB , ώστε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)
 γ) Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta EB$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

271. ΘΕΜΑ 13745

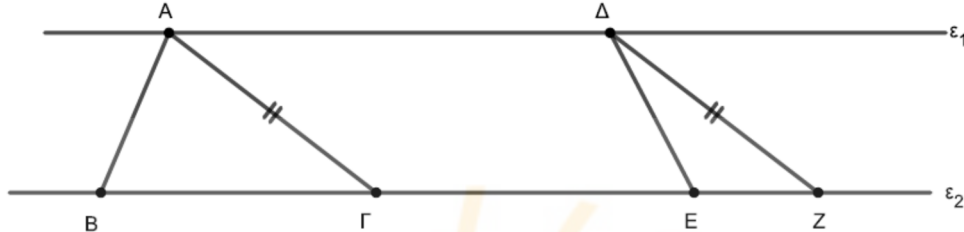
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

- α) Αν από το μέσο M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
 i. $ME = MZ$. (Μονάδες 6)
 ii. Το $AEMZ$ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2AB$. (Μονάδες 7)
 β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$, διαφορετικό από το μέσο M , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, τότε:
 i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$;
 ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$ με την περίμετρο του ρόμβου $AEMZ$ του ερωτήματος α/ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει. (Μονάδες 12)

272. ΘΕΜΑ 13751

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $AG = \Delta Z$.

- α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντάς τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
 ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$. (Μονάδες 12)
 β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$. (Μονάδες 8)

**273. ΘΕΜΑ 13856**

Σε τρίγωνο ΔEZ , φέρουμε τη διάμεσο ΔM και στην προέκτασή της προς το μέρος του M παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $\Delta M = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά EZ προς το E κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Z κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

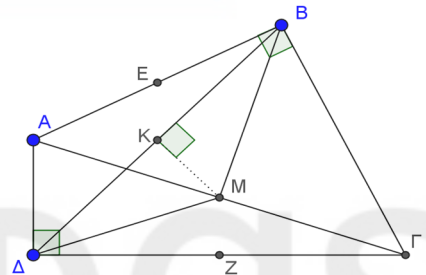
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAM και ΘGM είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $AD = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου EH του τριγώνου ΔEZ στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

274. ΘΕΜΑ 14566

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$.

Αν τα σημεία E, Z, M είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$, και $A\Gamma$ αντίστοιχως και το MK είναι κάθετο στην $B\Delta$, να αποδείξετε ότι :

- α) Το τρίγωνο BMD είναι ισοσκελές (μον. 5) και το K είναι το μέσο του $B\Delta$ (μον. 2). (Μονάδες 7)
 β) i. $EK = \frac{A\Delta}{2}$. (Μονάδες 6)
 ii. $MZ = EK$. (Μονάδες 6)
 γ) Το τετράπλευρο $KEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

**275. ΘΕΜΑ 37096**

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για:
 i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)
 ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

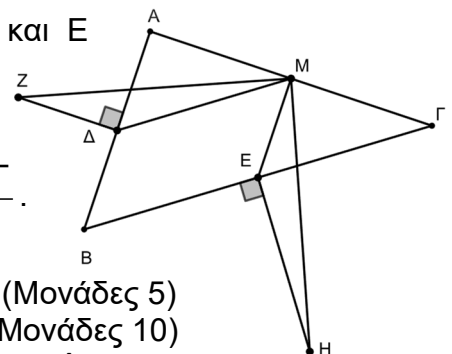
276. ΘΕΜΑ 37101

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ, M και E τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία

Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)
 ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 β) Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 10)



277. ΘΕΜΑ 37106

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας B .

Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και

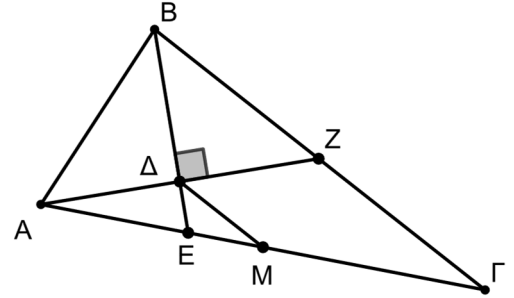
M το μέσον της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $DM \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 10)

γ) $\hat{E}\hat{A}M = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ είναι η γωνία του

τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

**278. ΘΕΜΑ 37157**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.

(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

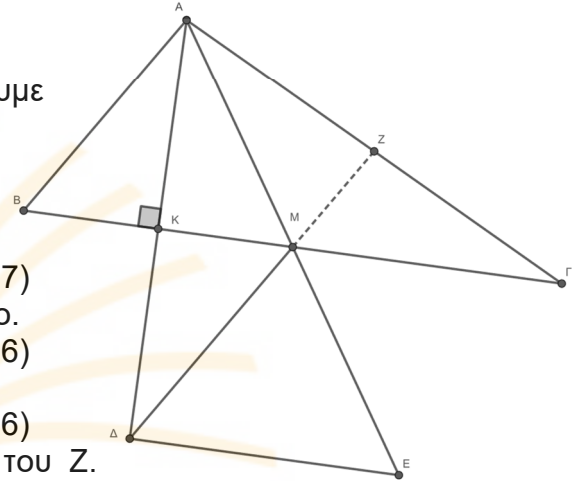
(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο $ABDM$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z .

(Μονάδες 6)

**279. ΘΕΜΑ 37165**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

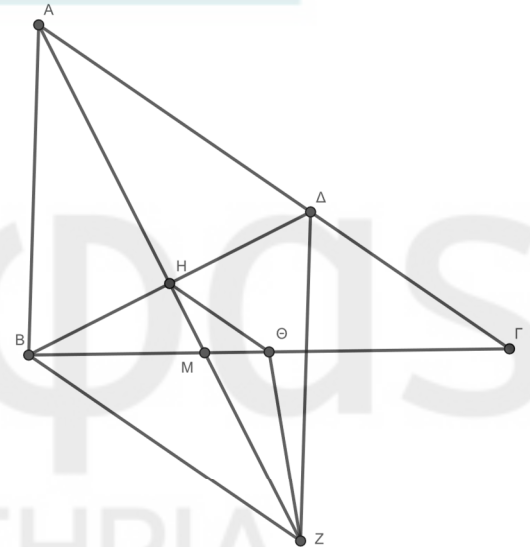
(Μονάδες 9)

β) $H\Theta \parallel BZ$.

(Μονάδες 9)

γ) $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 7)

**280. ΘΕΜΑ 37158**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ και E τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.

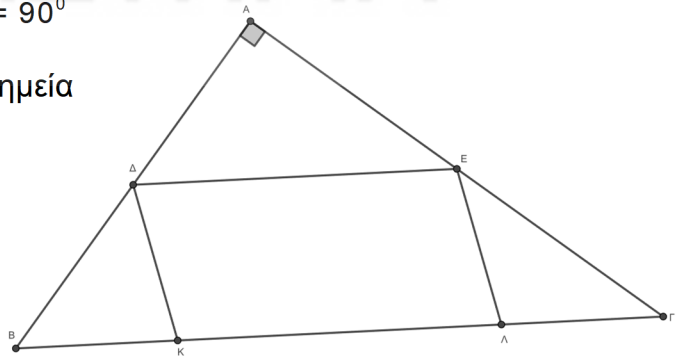
(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = 2\Delta K$.

(Μονάδες 6)



§5.7 – Βαρύκεντρο τριγώνου

ΘΕΜΑ 4°

281. ΘΕΜΑ 1706

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
 Π : Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.
 α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η Π και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

282. ΘΕΜΑ 1760

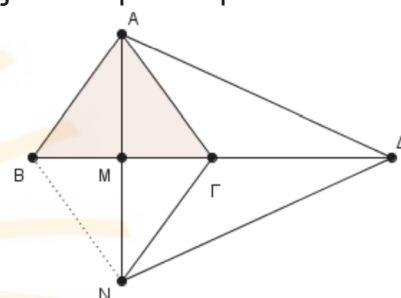
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$.

(Μονάδες 9)



283. ΘΕΜΑ 1820

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοι του AD, BE και ΓZ .

Προεκτείνουμε το τμήμα ZE

(προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

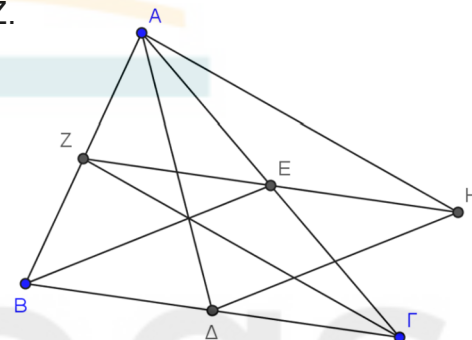
(Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.

(Μονάδες 8)



284. ΘΕΜΑ 1827

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου $B\Delta$.

Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z

τέτοιο ώστε $EZ = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

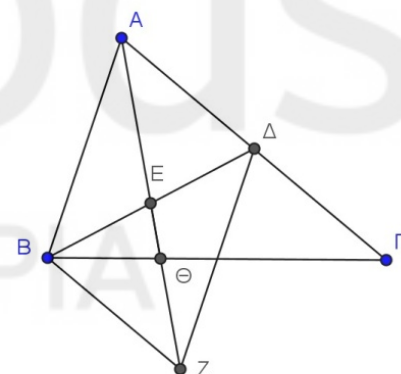
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

(Μονάδες 9)



285. ΘΕΜΑ 1878

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$.

Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου

που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο,

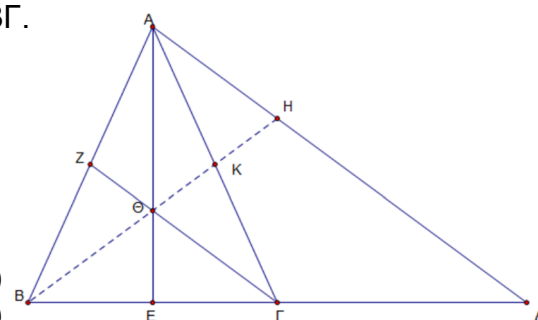
τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) $AH = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) $AH = 2Z\Theta$. (Μονάδες 7)



§5.8 – Ορθόκентρο τριγώνου

ΘΕΜΑ 4°

286. ΘΕΜΑ 1748

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD .

Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

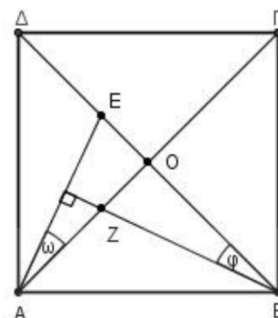
(Μονάδες 6)

β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$.

(Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

(Μονάδες 7)



287. ΘΕΜΑ 1754

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD .

Στο AD θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA = HB$.

Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$.

Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.

(Μονάδες 6)

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$.

(Μονάδες 6)

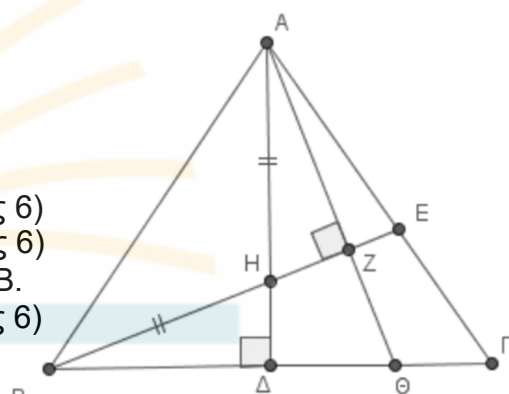
iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

(Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκентρο του τριγώνου AHB ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



288. ΘΕΜΑ 1764

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $A\Gamma = 2B\Gamma$.

Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A)

παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

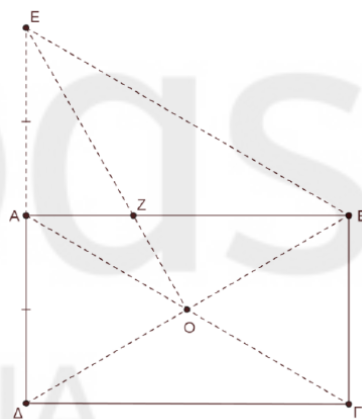
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

(Μονάδες 8)



289. ΘΕΜΑ 1777

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ τα ύψη

από τις κορυφές B , Γ αντίστοιχα και H

το ορθόκентρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται

τα M , N , K , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, ΓH , BH αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $MN = \Lambda K$.

(Μονάδες 6)

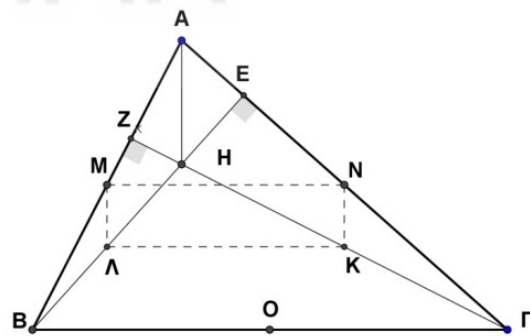
ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$.

(Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 6)

β) Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\widehat{M\hat{O}K} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)



290. ΘΕΜΑ 1780

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της AD και N το σημείο τομής των AE και $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου NMA . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$.

(Μονάδες 5)

ii. $\Gamma M \perp AN$.

(Μονάδες 5)

291. ΘΕΜΑ 37087

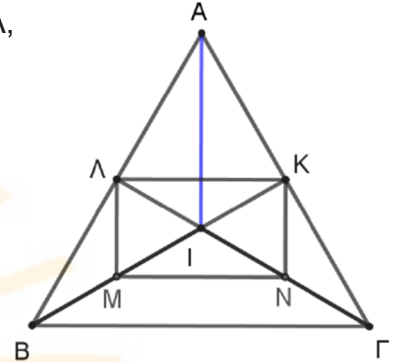
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν M και N τα μέσα των BI και ΓI αντίστοιχα, να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα $B\Gamma I$ και $\Gamma I K$ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

γ) Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

**292. ΘΕΜΑ 37116**

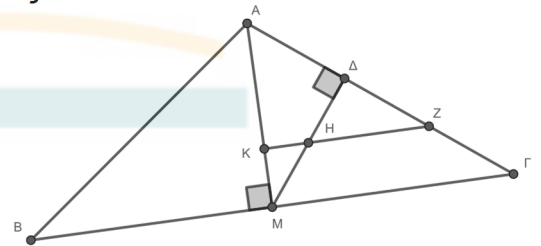
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$.

Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 9)

β) $MZ \parallel B\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$. (Μονάδες 8)

**293. ΘΕΜΑ 37137**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα.

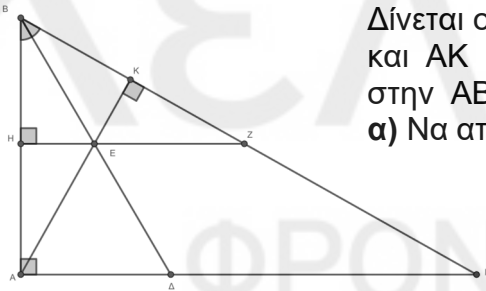
(Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

iii. οι AZ και $B\Delta$ είναι κάθετες. (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ . (Μονάδες 6)

**294. ΘΕΜΑ 37163**

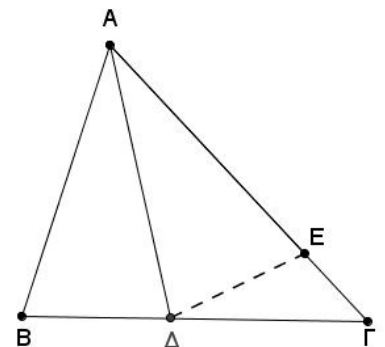
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE . (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H , τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

(Μονάδες 9)



§5.9 – Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

ΘΕΜΑ 2°

295. ΘΕΜΑ 13653

Σχεδιάζουμε γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο

A επί της πλευράς OX, τέτοιο ώστε $AO = 2$.

Φέρουμε τη διχοτόμο Oδ της γωνίας $\widehat{xOy}$ και

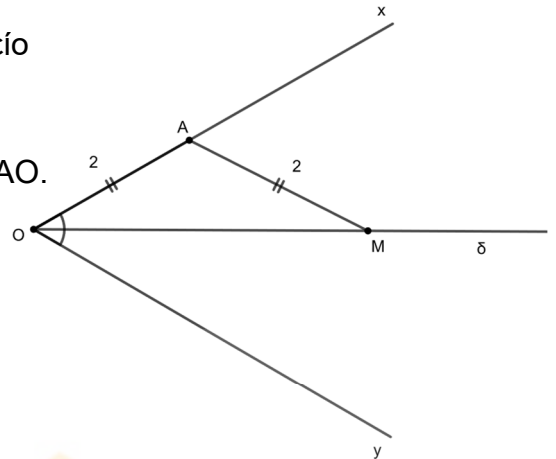
θεωρούμε σημείο M στην Oδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$.

Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\hat{O}y$. (Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM. (Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM. (Μονάδες 10)



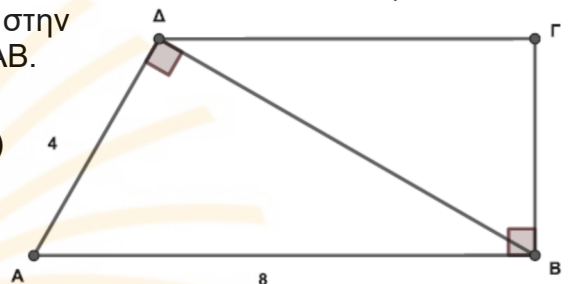
296. ΘΕΜΑ 13828

Σε τραπέζιο ABΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ.

Αν $AD = 4$ και $AB = 8$, τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραpezίου ABΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. (Μονάδες 13)



297. ΘΕΜΑ 13831

Ένα τρίγωνο ABΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > AG$.

Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;

(Μονάδες 10)

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$; (Μονάδες 8)

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας; (Μονάδες 7)

298. ΘΕΜΑ 13837

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και

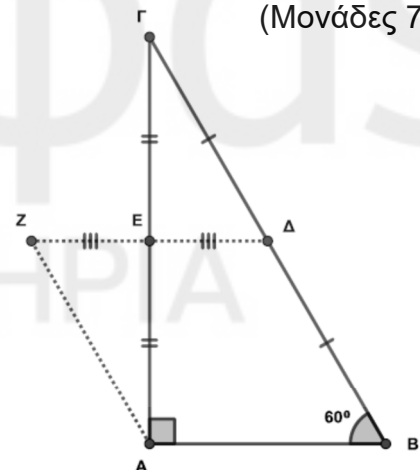
$\hat{B} = 60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι

τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα $EZ = DE$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



299. ΘΕΜΑ 14876

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με γωνία

$\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο

της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου,

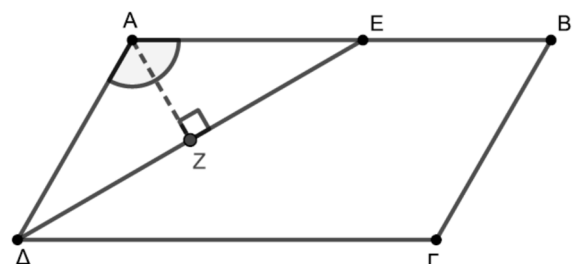
η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και

στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

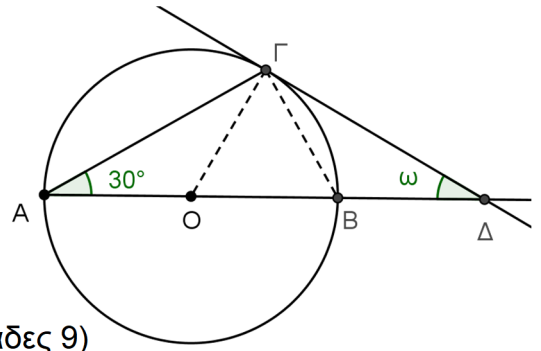
α) γωνία $A\hat{D}E = 30^\circ$. (Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$. (Μονάδες 15)



300. ΘΕΜΑ 34313

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή του $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) σε σημείο Δ .



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο

της γωνίας του $\Gamma\hat{O}\Delta$.

(Μονάδες 9)

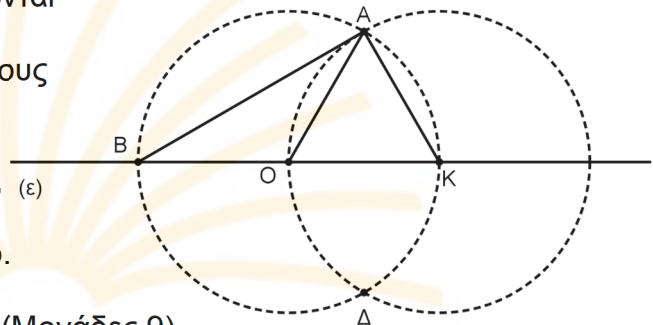
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $O\Delta = 2R$.

(Μονάδες 8)

301. ΘΕΜΑ 34314

Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους (O, ρ) και (K, ρ) τεμνόμενους στα σημεία A και Δ , με τα κέντρα τους O και K να βρίσκονται σε ευθεία (ε) που τέμνει τον κύκλο (O, ρ) σε σημείο B , και τη διάκεντρό τους OK να είναι ίση με ρ .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο, (ε)

(Μονάδες 7)

ii. το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ABK . (Μονάδες 9)

302. ΘΕΜΑ 34406

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8\text{cm}$.

Έστω AM είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$.

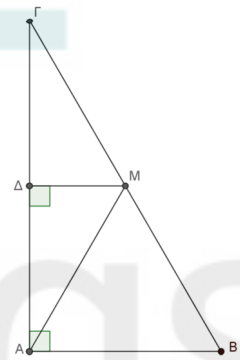
Αν η γωνία $\hat{A\hat{M}\Gamma}$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4\text{cm}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.

(Μονάδες 13)

**303. ΘΕΜΑ 34408**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$,

$AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$.

Να δείξετε ότι:

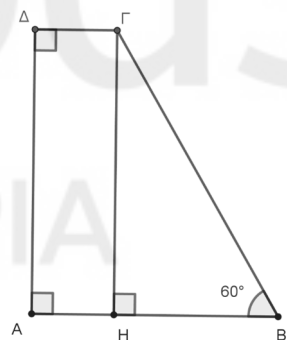
α) $HB = 2\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με

$$AH = \frac{1}{2}HB.$$

(Μονάδες 13)

**304. ΘΕΜΑ 34411**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA

(προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$

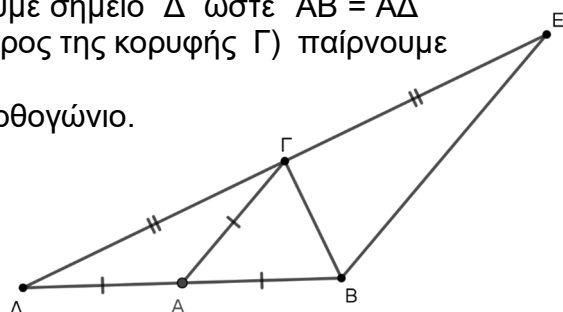
και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E , ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$

(Μονάδες 13)



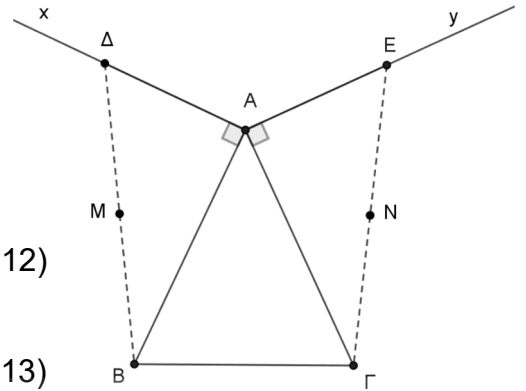
305. ΘΕΜΑ 34420

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).
Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες
 Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$,
όπως στο διπλανό σχήμα.

Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E
αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)

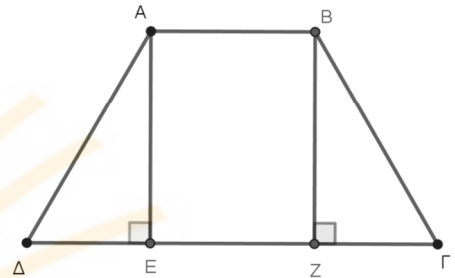
β) Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων
 $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το
τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

**306. ΘΕΜΑ 34488**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$)
με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .
Να αποδείξετε ότι :

α) $\Delta E = \Gamma Z$. (Μονάδες 12)

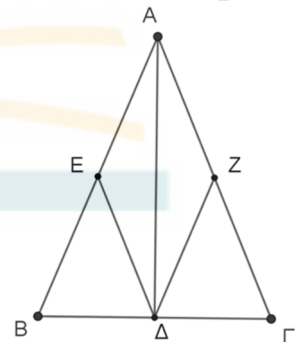
β) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.
(Μονάδες 13)

**307. ΘΕΜΑ 34492**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$),
το ύψος του AD και τα μέσα E και Z
των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.
(Μονάδες 15)

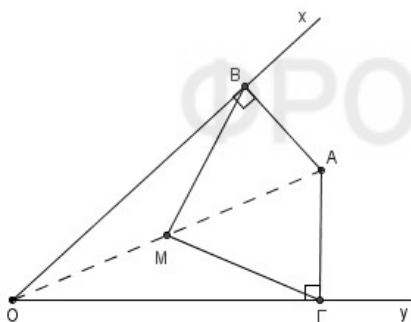
β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.
(Μονάδες 10)

**308. ΘΕΜΑ 34495**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.
Θεωρούμε το ύψος AD και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$, (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος AD (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE .
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

309. ΘΕΜΑ 34515

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο A στο εσωτερικό
της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB , $A\Gamma$
προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα,
και ονομάζουμε M το μέσο του OA .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $\hat{BMA} = 2 \cdot x\hat{O}A$ (Μονάδες 8)

310. ΘΕΜΑ 36086

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και σημείο M
το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία $\hat{AM\Gamma}$. (Μονάδες 9)

311. ΘΕΜΑ 36093

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $AD = ED = DB$ με $AE = 8$ και $DB = 10$.

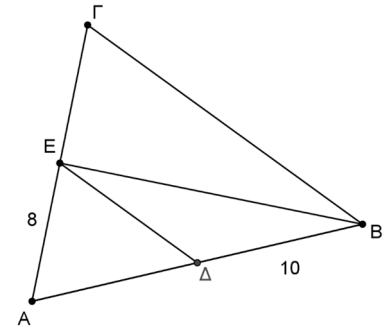
α) i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

**312. ΘΕΜΑ 36097**

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες και $AB = 6$.

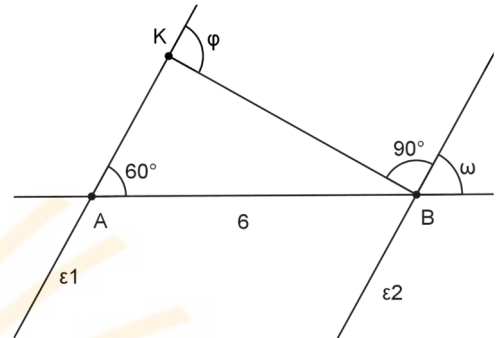
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**313. ΘΕΜΑ 36103**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax .

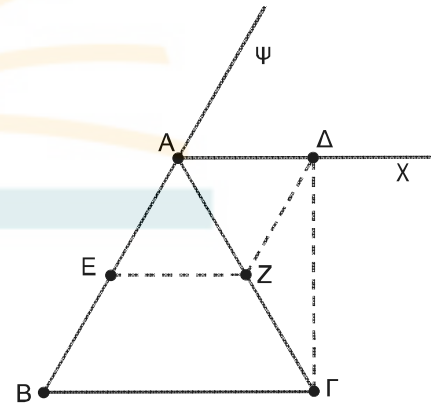
Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = AE = AZ$. (Μονάδες 9)

β) Η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίση με 30° . (Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

**314. ΘΕΜΑ 36109**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει για τις γωνίες $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{cm}$ να βρείτε το μήκος της AB . (Μονάδες 10)

315. ΘΕΜΑ 36111

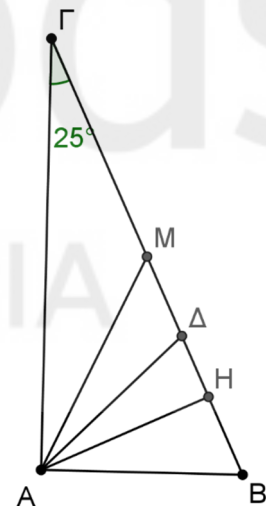
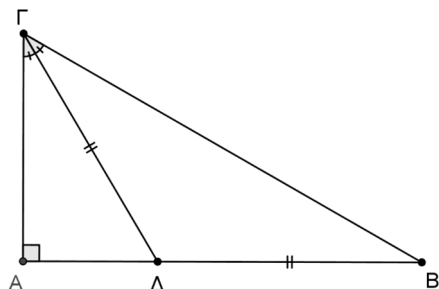
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$.

Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}MB$, $\hat{H}AB$, $\hat{A}DB$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{M}A\Delta = \hat{\Delta}AH = 20^\circ$. (Μονάδες 10)

**316. ΘΕΜΑ 36116**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) $AB = 3\text{cm}$.

(Μονάδες 13)

317. ΘΕΜΑ 36169

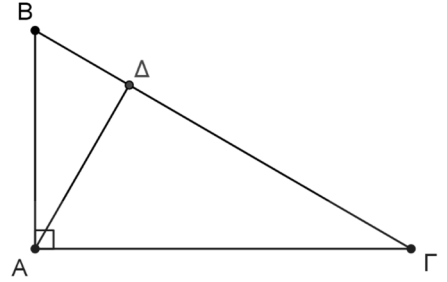
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ . (Μονάδες 10)
 β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB . (Μονάδες 15)

318. ΘΕΜΑ 36171

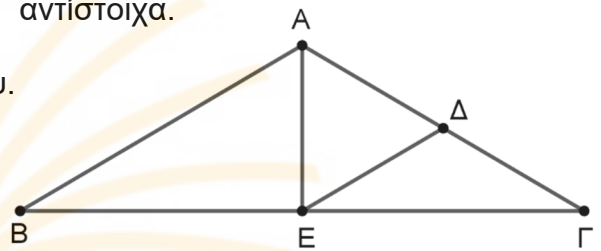
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και AD το ύψος του.

- α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)
 β) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{B\hat{A}D}$. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι: $BD = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 7)

**319. ΘΕΜΑ 36224**

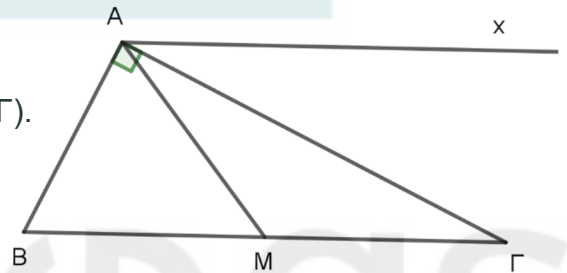
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30° . Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

**320. ΘΕΜΑ 36328**

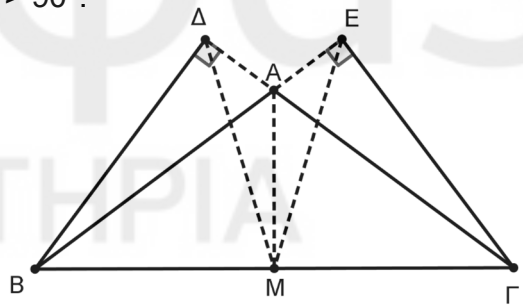
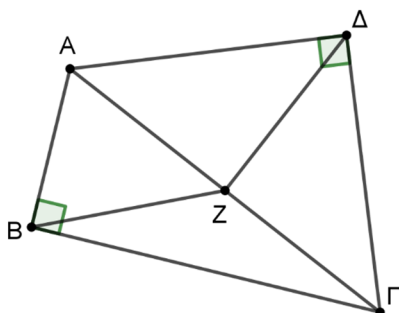
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

- α) $MA\Gamma = M\Gamma A$, (Μονάδες 12)
 β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx . (Μονάδες 13)

**321. ΘΕΜΑ 36350**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα BD και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $BD = \Gamma E$. (Μονάδες 10)
 β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$, τότε:
 i) Να αποδείξετε ότι $MD = ME$. (Μονάδες 8)
 ii) Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία ΔME (Μονάδες 7)

**322. ΘΕΜΑ 36355**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$. (Μονάδες 13)
 β) Αν $\hat{A\hat{\Gamma}B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B\hat{A}\Delta}$ και $\hat{B\hat{\Gamma}\Delta}$. (Μονάδες 12)

323. ΘΕΜΑ 37006

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, φέρουμε το ύψος του AD και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma\Delta D}$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)
 β) $AM\Delta = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

324. ΘΕΜΑ 37007

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$. (Μονάδες 8)
 β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$, (Μονάδες 9)
 γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

325. ΘΕΜΑ 37016

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

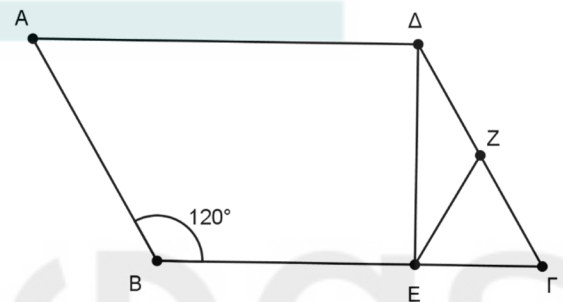
- α) τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα μεταξύ τους, (Μονάδες 12)
 β) η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$. (Μονάδες 13)

326. ΘΕΜΑ 37017

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)
 β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$. (Μονάδες 9)
 γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$. (Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 3°****327. ΘΕΜΑ 12165**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την AB στο μέσο της E .



- α) Να αποδείξετε ότι $AB = 2A\Delta$. (Μονάδες 6)
 β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο E στην $\Gamma\Delta$ την τέμνει στο H , τότε να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta E}{HE} = 2$. (Μονάδες 7)
 γ) Αν M το μέσο της $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)
 δ) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}} = 90^\circ$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

328. ΘΕΜΑ 1737

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH .

Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

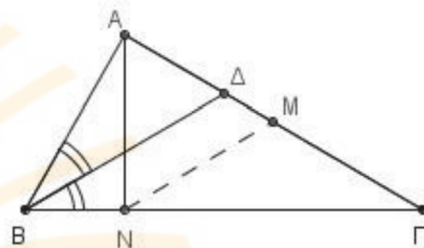
- α) $AH = AD = AE$. (Μονάδες 10)
- β) Το τρίγωνο EHD είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
- γ) Τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$. (Μονάδες 7)

329. ΘΕΜΑ 1738

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος BD της γωνίας $\hat{B}$.

Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο BD που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N .
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
- β) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- γ) $AN \perp B\Gamma$. (Μονάδες 10)



330. ΘΕΜΑ 1759

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2AD$.

Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- γ) Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $ZH\Gamma$. (Μονάδες 8)

331. ΘΕΜΑ 1761

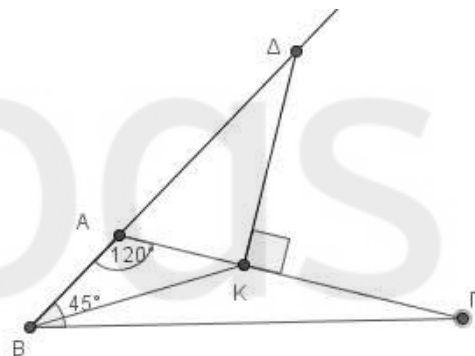
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $\hat{B} = 45^\circ$.

Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $AD = 2AB$.

Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο K .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία ΔDK είναι ίση με 30° . (Μονάδες 6)
- β) Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- γ) Αν Z το μέσο της ΔA , τότε $\hat{ZKB} = 90^\circ$. (Μονάδες 6)
- δ) Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$. (Μονάδες 7)



332. ΘΕΜΑ 1770

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του.

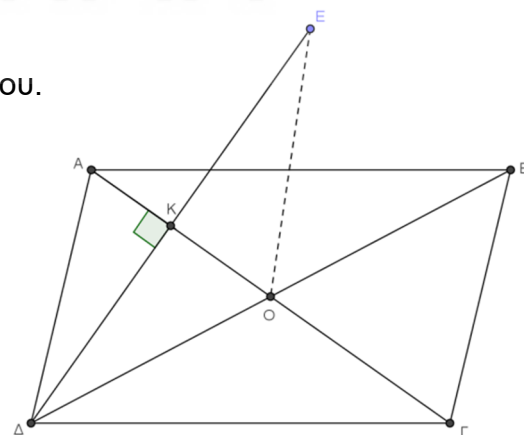
Από την κορυφή Δ φέρνουμε το τμήμα ΔK

κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκταση του

προς το K θεωρούμε σημείο E ,

ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$. (Μονάδες 8)
- β) η γωνία ΔEB είναι ορθή. (Μονάδες 8)
- γ) το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



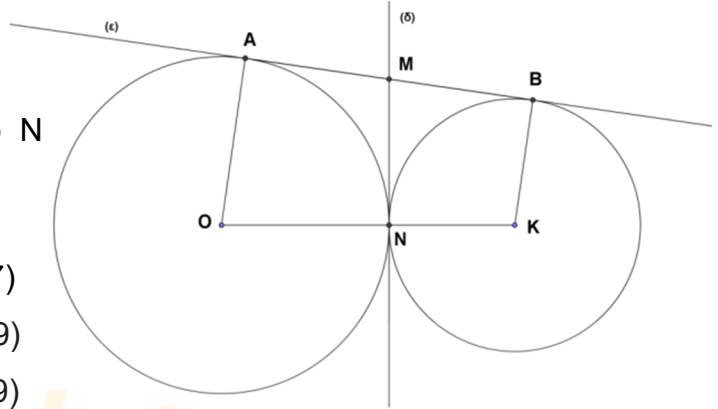
333. ΘΕΜΑ 1771

Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δυο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ.

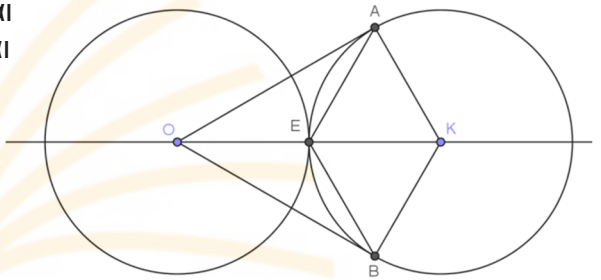
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ. (Μονάδες 7)
 β) $\angle \text{ΟΜΚ} = 90^\circ$. (Μονάδες 9)
 γ) $\angle \text{ΑΝΒ} = 90^\circ$. (Μονάδες 9)

**334. ΘΕΜΑ 1796**

Δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι:

- α) $AE = BE$. (Μονάδες 9)
 β) $\angle \text{ΑΟΚ} = 30^\circ$. (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

**335. ΘΕΜΑ 1806**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

- α) $\angle \text{Β} = \angle \text{ΒΑΜ}$. (Μονάδες 8)
 β) $\angle \text{ΑΔΗ} = \angle \text{ΔΑΗ}$. (Μονάδες 9)
 γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)

336. ΘΕΜΑ 1808

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ,

ώστε $EL = AE$ και στην προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ, τέτοιο ώστε $ΔΚ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

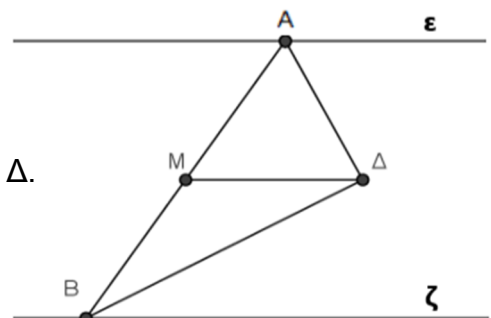
- α) $KΔ = ΛΕ$. (Μονάδες 6)
 β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)
 γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

337. ΘΕΜΑ 1811

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) , και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ.

Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία ΒΔΑ είναι ορθή. (Μονάδες 9)
 β) $\angle \text{ΒΜΔ} = 2 \cdot \angle \text{ΜΔΑ}$. (Μονάδες 8)
 γ) $ΜΔ \parallel \varepsilon$. (Μονάδες 8)



338. ΘΕΜΑ 1812

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$.

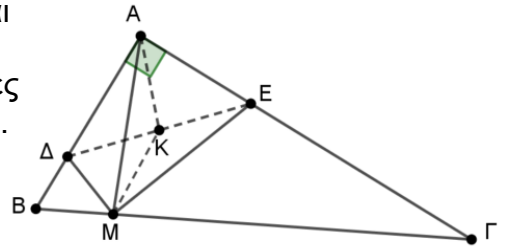
Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔME είναι ορθή.

(Μονάδες 12)

β) Αν K το μέσον του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

(Μονάδες 13)

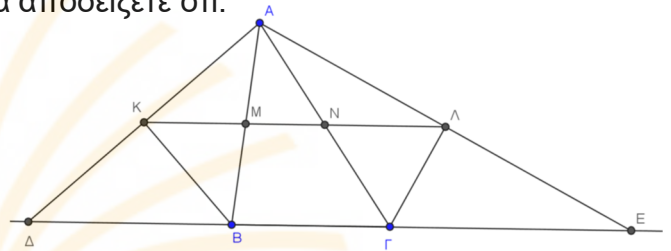
**339. ΘΕΜΑ 1824**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις AD και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των AD και AE αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ) $K\Lambda = \frac{\Gamma B + \Gamma A + BA}{2}$. (Μονάδες 8)

**340. ΘΕΜΑ 1872**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Gamma$ στο Z .

Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

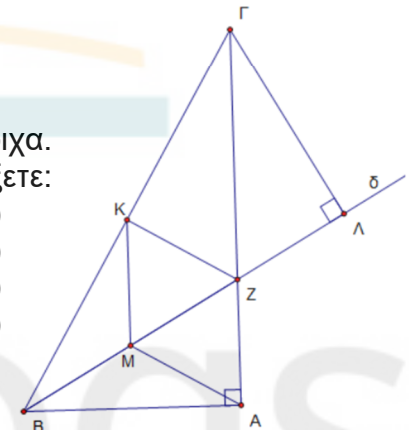
Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

γ) $\Gamma Z = 2ZA$. (Μονάδες 7)

δ) $B\Lambda = A\Gamma$. (Μονάδες 6)

**341. ΘΕΜΑ 1874**

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $K\Lambda$.

Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA

να είναι κάθετη στην $K\Lambda$. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$.

Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων

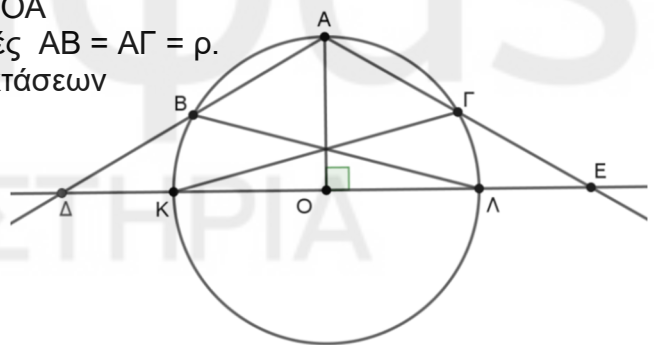
των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα με την ευθεία

της διαμέτρου $K\Lambda$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $BA\Gamma$ είναι 120° . (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

γ) $K\Gamma = \Lambda B$. (Μονάδες 9)

**342. ΘΕΜΑ 1876**

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)

και $AB\Delta$ ($AB = A\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους

$A\Gamma$ και $B\Delta$ να είναι κάθετες.

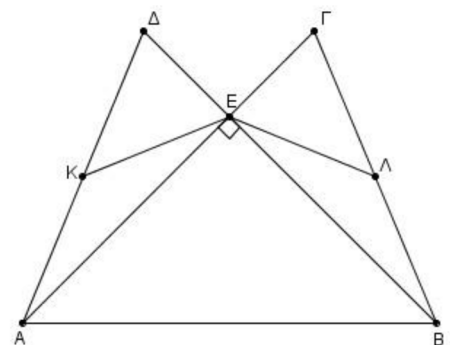
Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων

$A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $E\Delta = E\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) $\Delta\Gamma \parallel AB$. (Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο $EK\Lambda$ είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$. (Μονάδες 10)



343. ΘΕΜΑ 1895

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τα ύψη AK και $\Gamma\Lambda$.

Αν E το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 80° , να αποδείξετε ότι η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{BKE}$. (Μονάδες 15)

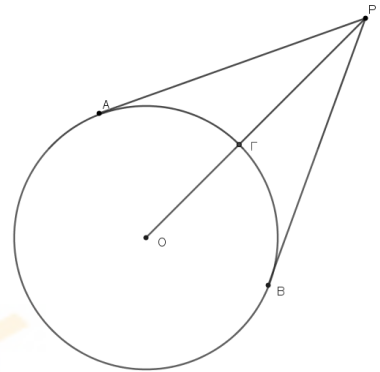
344. ΘΕΜΑ 13520

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $\widehat{APB} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $OP = 2\rho$. (Μονάδες 10)

β) $\widehat{AGB} = 120^\circ$. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο $OA\Gamma B$ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

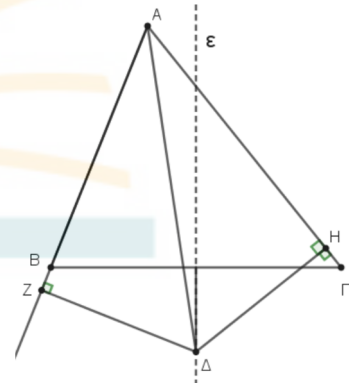
**345. ΘΕΜΑ 13522**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{A} = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$. (Μονάδες 8)

**346. ΘΕΜΑ 13540**

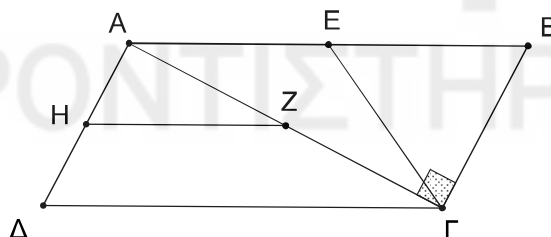
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγώνίός του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma E = ZH$. (Μονάδες 9)

ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma E$. (Μονάδες 9)

β) Αν $\Delta H = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

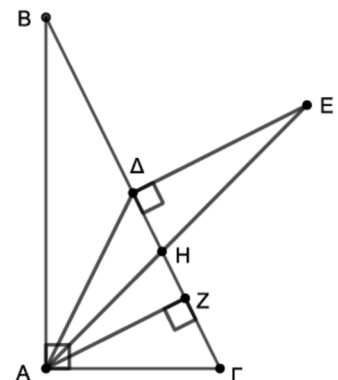
**347. ΘΕΜΑ 13672**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$. (Μονάδες 8)

β) $A\Delta = \Delta E$. (Μονάδες 9)

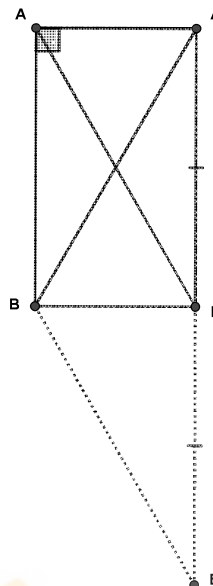
γ) $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$. (Μονάδες 8)



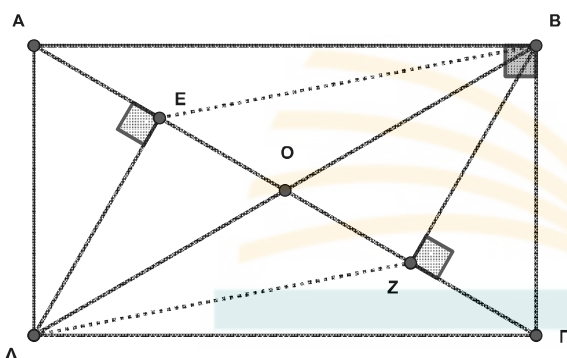
348. ΘΕΜΑ 13851

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- γ) Αν $\hat{\Delta B E} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$. (Μονάδες 9)



349. ΘΕΜΑ 13852



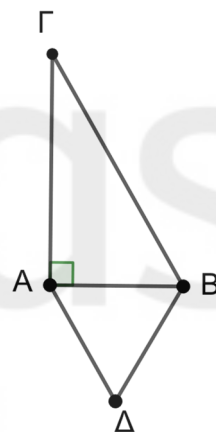
Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο O . Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο AG , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- γ) Αν $\hat{\Delta A E} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Delta$. (Μονάδες 12)

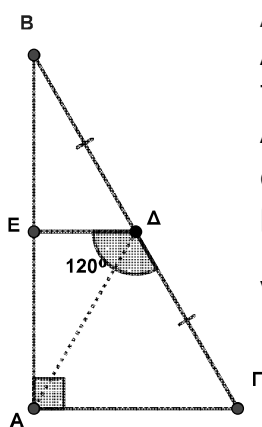
350. ΘΕΜΑ 13853

Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)
- β) Αν η περίμετρος του $AB\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν το σημείο K είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $A\Delta BK$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου K . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $A\Delta BK$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)



351. ΘΕΜΑ 13855



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E\Delta\Gamma} = 120^\circ$, τότε:

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\hat{\Delta\Gamma A}$. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
- γ) Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Gamma$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Gamma H} = 90^\circ$. (Μονάδες 12)

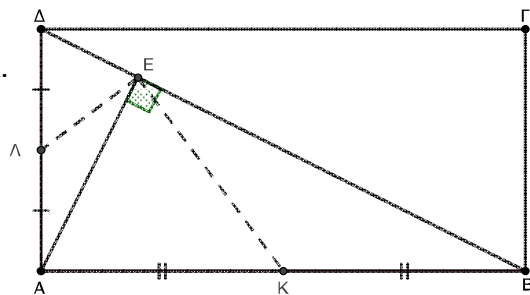
352. ΘΕΜΑ 14879

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.
Από την κορυφή A φέρουμε AE κάθετη στη $B\Delta$.
Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{K}\hat{E}\hat{\Lambda} = 90^\circ$.

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 16)



β) Αν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$. (Μονάδες 9)

353. ΘΕΜΑ 14881

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσος του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και $M\Lambda$ κάθετη στην $A\Gamma$. Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $N\hat{K}M = N\hat{M}K$. (Μονάδες 7)

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA . (Μονάδες 9)

γ) $AM = KN + \Lambda P$. (Μονάδες 9)

354. ΘΕΜΑ 14886

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Αν Θ είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε :

α) Να αποδείξετε ότι:

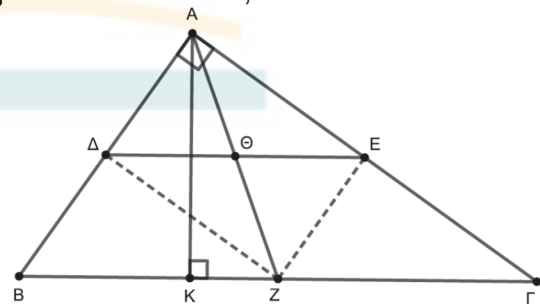
i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε:

i. να βρείτε τη γωνία AZB . (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 5)

**255. ΘΕΜΑ 34318**

Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και E το μέσο του τόξου του $B\Gamma$.

Μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται στον κύκλο στο E .

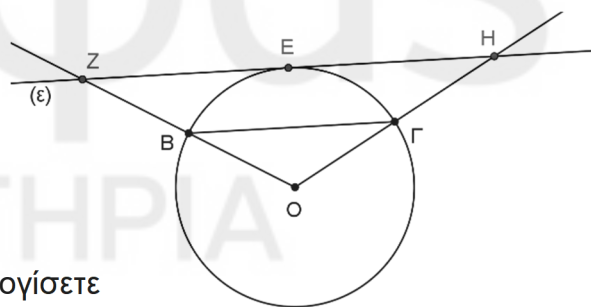
Οι προεκτάσεις των $OB, O\Gamma$ (προς το B και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία Z και H αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma \parallel (\epsilon)$ (Μονάδες 9)

ii. $OZ = OH$ (Μονάδες 9)

β) Αν το σημείο B είναι το μέσο του OZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH . (Μονάδες 7)

**356. ΘΕΜΑ 34329**

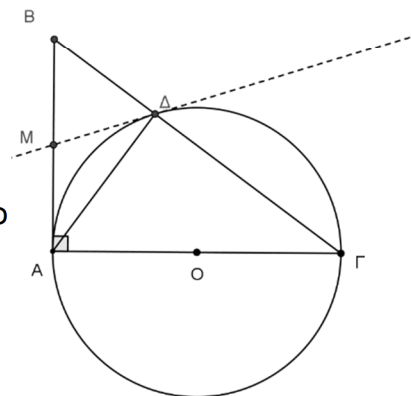
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$).

Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο κέντρου O , ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου σε σημείο Δ . Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο M . Να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{B}$, (Μονάδες 9)

β) $M\hat{\Delta}B = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)

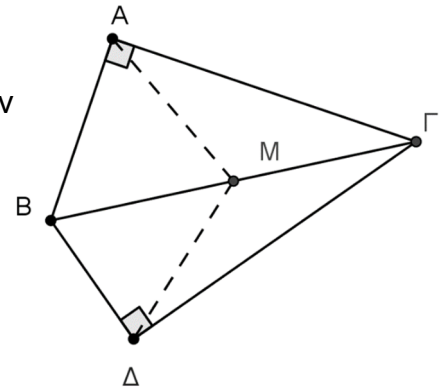
γ) το M είναι το μέσο του AB . (Μονάδες 7)



357. ΘΕΜΑ 34330

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) με τις κορυφές τους A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$ και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)
 β) $\hat{A}M\Delta = 2 \cdot \hat{A}\Gamma\Delta$, (Μονάδες 9)
 γ) τα A, B, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, (Μονάδες 7)
 τον οποίο και να κατασκευάσετε.

**358. ΘΕΜΑ 34334**

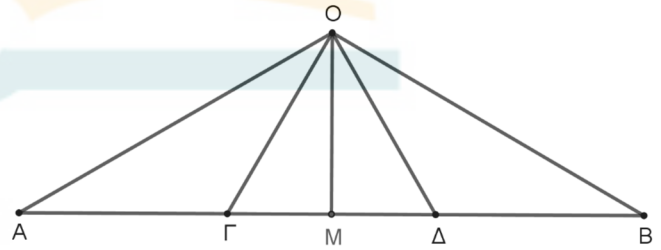
Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$, (Μονάδες 8)
 β) το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 8)
 γ) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$. (Μονάδες 9)

359. ΘΕΜΑ 37075

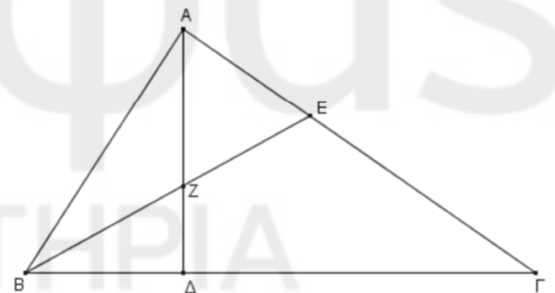
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. η γωνία $\Gamma O\Delta$ είναι 60° . (μονάδες 9)
 ii. οι γωνίες OAG, OBD είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30° . (μονάδες 9)
 β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$. (μονάδες 7)

**360. ΘΕΜΑ 37082**

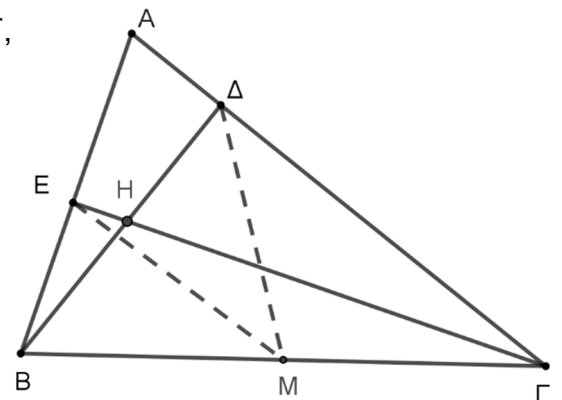
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω $A\Delta$ ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$. (Μονάδες 10)
 ii. $A\Delta = \frac{3}{2} BZ$. (Μονάδες 8)
 β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)

**361. ΘΕΜΑ 37085**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι
 i. $M\Delta = ME$. (Μονάδες 10)
 ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\hat{A}\Delta H = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH . (Μονάδες 10)



362. ΘΕΜΑ 37088

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E .

Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο.

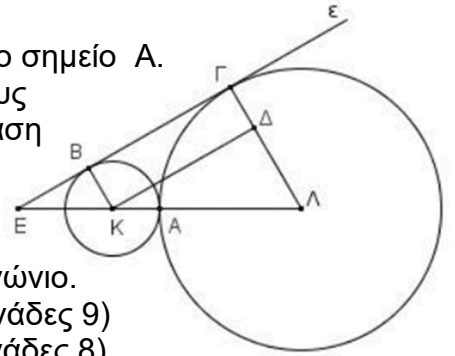
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι 30° .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 8)

**363. ΘΕΜΑ 37100**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.

Φέρουμε το ύψος AD και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

(Μονάδες 9)

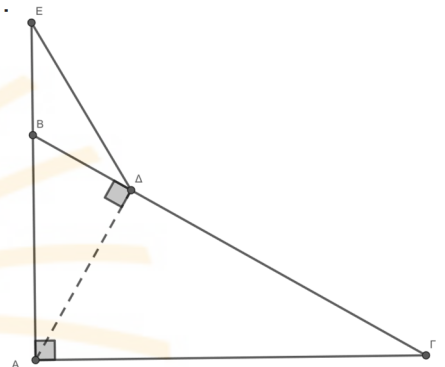
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2},$

(Μονάδες 8)

ii. $AE = \Gamma\Delta.$

(Μονάδες 8)

**364. ΘΕΜΑ 37104**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B . (Μονάδες 6)

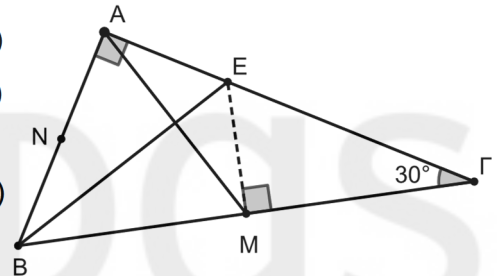
ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}.$

(Μονάδες 6)

iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

(Μονάδες 7)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

**365. ΘΕΜΑ 37126**

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο A το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΘH και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘH .

Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου $E\Theta$, ΘH , ZH διαδοχικά.

Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ. η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta$ της μπάλας είναι τετράγωνο.

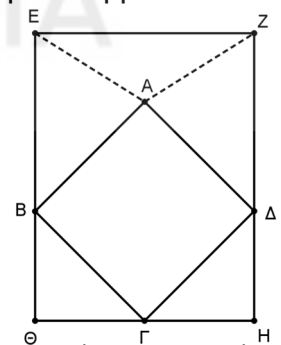
ii. Το σημείο A ισαπέχει από τα τις κορυφές E και Z του μπιλιάρδου.

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ .

(Μονάδες 8)



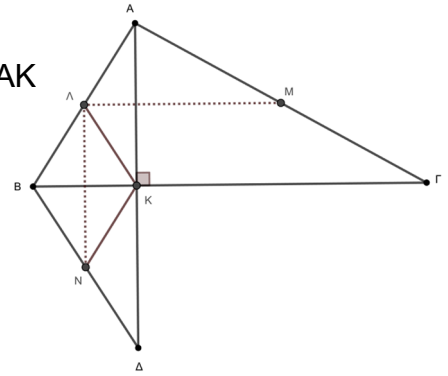
366. ΘΕΜΑ 37132

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$.

Έστω Λ, M, N τα μέσα των πλευρών

$AB, A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) Το τετράπλευρο $B\Lambda K N$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
 γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$. (Μονάδες 9)

**367. ΘΕΜΑ 37133**

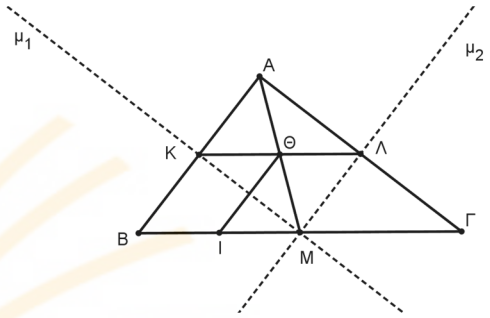
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 5)
 ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
 iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$. (Μονάδες 6)

β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$,

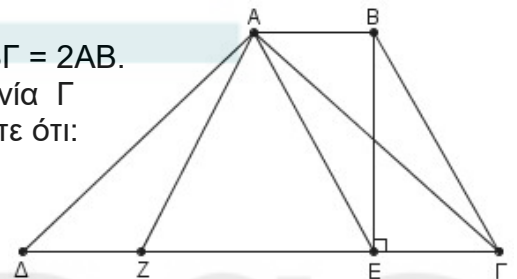
να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta I B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

**368. ΘΕΜΑ 37134**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$.

Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραπέζιου, να αποδείξετε ότι:

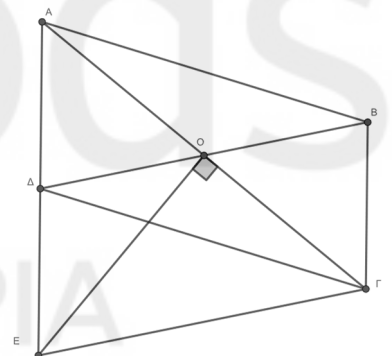
- α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
 γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα. (Μονάδες 9)

**369. ΘΕΜΑ 37136**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ στο κέντρο του O , αυτή τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ σε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
 γ) Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

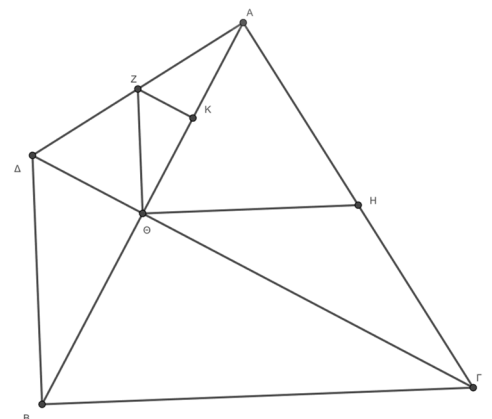
**370. ΘΕΜΑ 37138**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$,

εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^\circ$.

Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB . (Μονάδες 8)
 β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)
 γ) Αν ZK είναι η κάθετη στην AB από το σημείο Z , να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$. (Μονάδες 8)



371. ΘΕΜΑ 37140

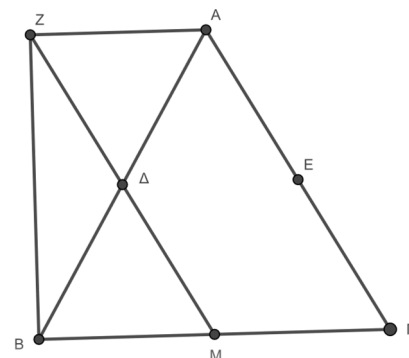
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και M των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)

δ) Η BZ είναι κάθετη στη ZA . (Μονάδες 6)

**372. ΘΕΜΑ 37142**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Z , H και M τα μέσα των ΔB , $E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH . (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$

και $AE\Gamma$ έγραψε τα εξής:

« 1. $A\Delta = AE$ από υπόθεση

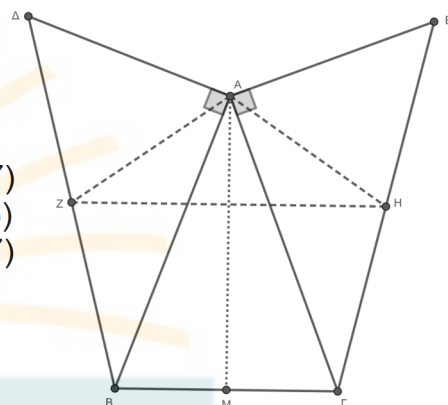
2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\hat{\Delta AB} = \hat{E\Gamma A}$ ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δυο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

(Μονάδες 5)

**373. ΘΕΜΑ 37156**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ .

Έστω Λ το μέσο του AB και

K το μέσο του $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$.

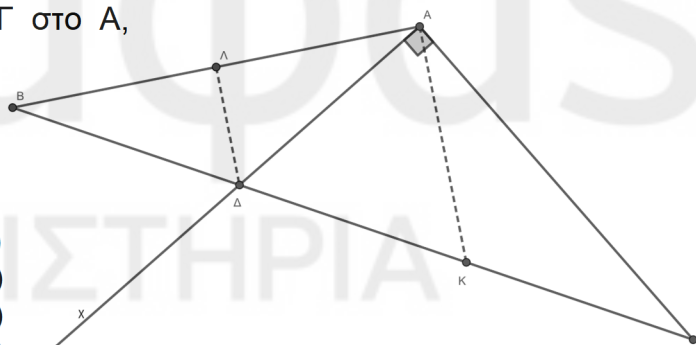
(Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$.

(Μονάδες 5)

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$.

(Μονάδες 4)

**374. ΘΕΜΑ 37159**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$

τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$

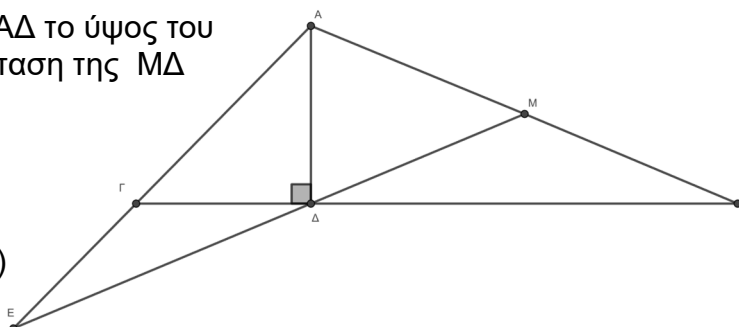
στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \hat{AM\Delta}$. (Μονάδες 10)

γ) $\Gamma E < A\Gamma$. (Μονάδες 7)



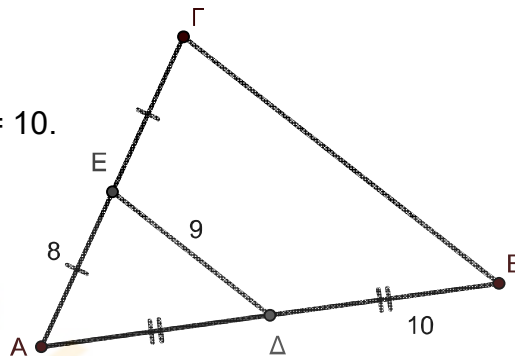
§5.10 – Τραπέζιο

ΘΕΜΑ 2°

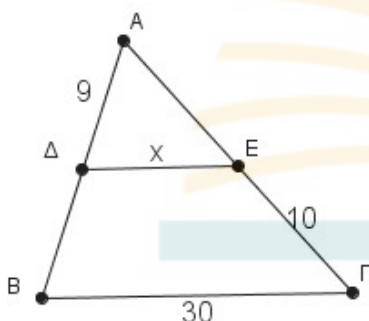
375. ΘΕΜΑ 14877

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE = 8$, $E\Delta = 9$ και $\Delta B = 10$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 8)
- Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$. (Μονάδες 9)



376. ΘΕΜΑ 36092



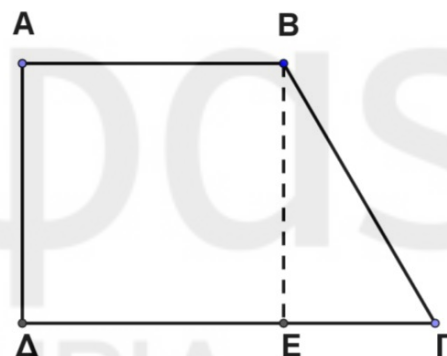
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AD = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

- Να υπολογίσετε
 - το μήκος x του τμήματος ΔE , (Μονάδες 8)
 - την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

377. ΘΕΜΑ 36113

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από την κορυφή B .

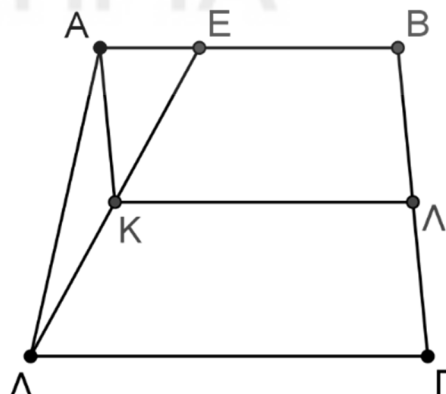
- Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε $2E\Gamma = B\Gamma$. (Μονάδες 9)
- Αν M , N τα μέσα των πλευρών AD , $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN . (Μονάδες 8)



378. ΘΕΜΑ 36166

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB , ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραpezίου $EB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

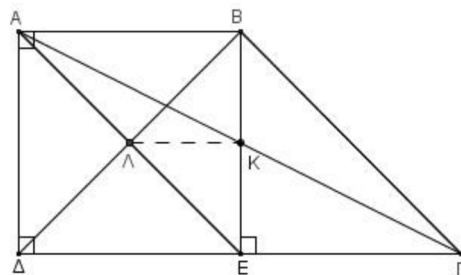


ΘΕΜΑ 4°

379. ΘΕΜΑ 1727

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και την $\Gamma\Delta$ στο E . Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ (Μονάδες 8)
- β) $B\Delta = AE$ (Μονάδες 9)
- γ) $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$. (Μονάδες 8)



380. ΘΕΜΑ 1735

Θεωρούμε ευθεία (ϵ) και δυο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ϵ) .

- α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$. (Μονάδες 6)
- β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και της ευθείας (ϵ) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

381. ΘΕΜΑ 1747

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB .

Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου σε ένα σημείο του E και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)
 - ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$. (Μονάδες 8)
- β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 9)

382. ΘΕΜΑ 1757

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.

Φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

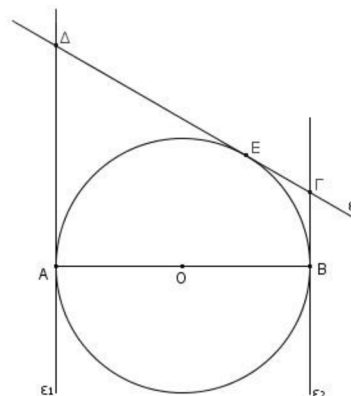
- α) Να δείξετε ότι το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι το $BE\Gamma$ είναι τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσον του BK . (Μονάδες 9)

383. ΘΕΜΑ 1758

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB .

Θεωρούμε ευθεία ϵ εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O \Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
- γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB . (Μονάδες 7)



384. ΘΕΜΑ 1778

Δίνεται ορθή γωνία $\hat{xOy} = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox αντίστοιχα, με $OA = OB$. Μια ευθεία (ε) που δεν είναι παράλληλη στην AB διέρχεται από την κορυφή O ώστε τα σημεία A και B να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Η κάθετη από το σημείο A στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετη από το σημείο B στην (ε) την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

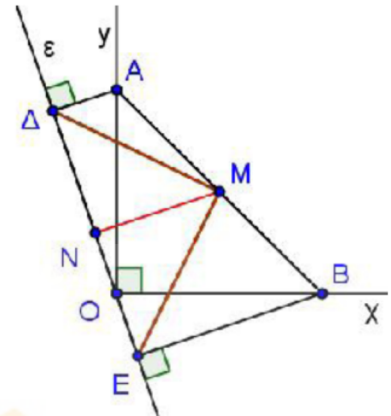
α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) $A\Delta + BE = \Delta E$. (Μονάδες 7)

γ) $MN = \frac{\Delta E}{2}$, όπου M, N τα μέσα των

ΔE και AB αντίστοιχα. (Μονάδες 7)

δ) Το ΔME είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 4)

**385. ΘΕΜΑ 1815**

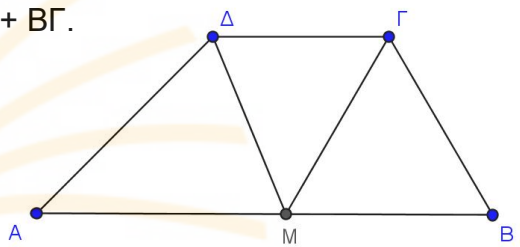
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$.

Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $M\Gamma B$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)

**386. ΘΕΜΑ 1821**

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

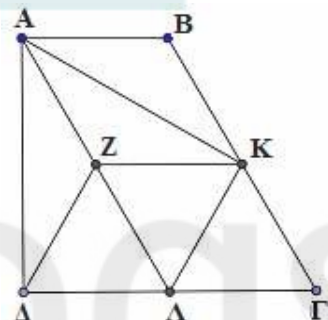
Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Το Z είναι το μέσο του $A\Lambda$. (μονάδες 6)

β) $B\Gamma = 2\Delta Z$. (μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος. (μονάδες 5)

δ) $\hat{AK\Lambda} = 90^\circ$. (μονάδες 8)

**387. ΘΕΜΑ 13519**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο M της ΔE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

α) Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) Φέρνουμε την $E\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$. (Μονάδες 9)

388. ΘΕΜΑ 13742

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

α) Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $\hat{BKA} = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 6)

δ) Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

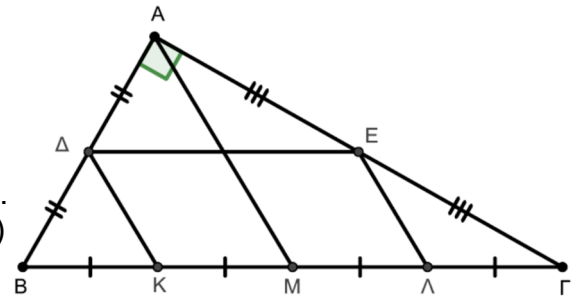
389. ΘΕΜΑ 14888

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}B\Gamma$. (Μονάδες 12)

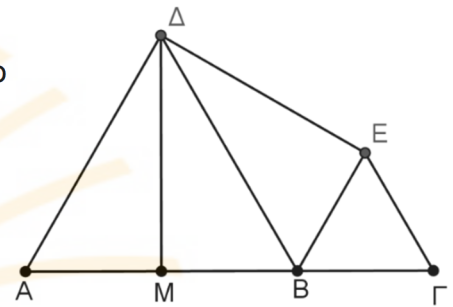
**390. ΘΕΜΑ 34320**

Έστω A, B και Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta B$ και $BE\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα $A\Delta$ και BE , (Μονάδες 9)

β) τα τρίγωνα ΔMB και ΔEB είναι ίσα, (Μονάδες 8)

γ) $\hat{\Delta MB} + \hat{\Delta EB} = 180^\circ$. (Μονάδες 8)

**391. ΘΕΜΑ 34328**

Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές σημεία A, B, Γ και Δ κύκλου (O, ρ) , διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$, με τη $B\Delta$ να διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου, και με ίσες πλευρές τις AB και $B\Gamma$.

Έστω ότι η κάθετη στη $B\Delta$ στο σημείο O τέμνει τις πλευρές $A\Delta$

και $\Gamma\Delta$ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα,

οι γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές

και η γωνία του $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας του $\hat{\Delta}$.

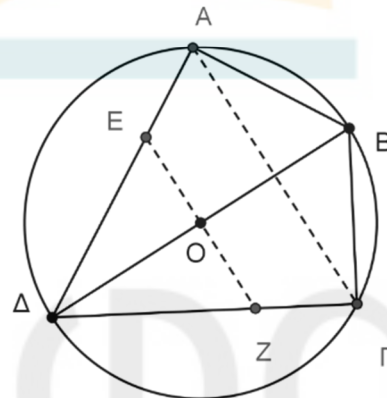
α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η διαγώνιος $B\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$ του $AB\Gamma\Delta$, (Μονάδες 7)

ii. το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος, (Μονάδες 6)

iii. το τετράπλευρο $A\Gamma ZE$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 6)

**392. ΘΕΜΑ 37080**

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$.

Επίσης τα Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

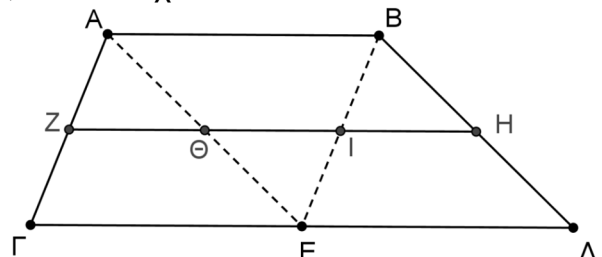
Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE τα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 10)

β) τα σημεία Θ, I είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα, (Μονάδες 5)

γ) $ZH = \frac{3}{2}AB$. (Μονάδες 10)



393. ΘΕΜΑ 37084

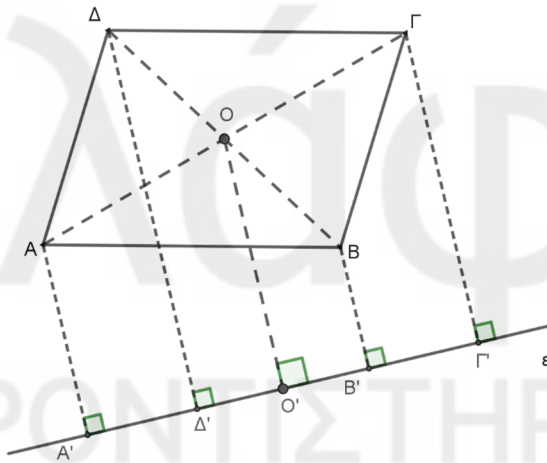
Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Φέρουμε AD, BG κάθετες στην (ε) και M, N μέσα των AB και GD αντίστοιχα.

- α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)
- να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABGD$ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
 - $AD < BG$. (Μονάδες 4)
 - $AD = BG$. (Μονάδες 4)
 - να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)
- β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $AGBD$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

394. ΘΕΜΑ 37086

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABGD$ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' των κορυφών του A, B, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε .

- α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3, BB' = 2, \Gamma\Gamma' = 5$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)
 - Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$. (Μονάδες 9)
- β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**395. ΘΕΜΑ 37115**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς AD τμήμα $\Delta Z = AD$. Να αποδείξετε ότι:

- α) i. Τα τετράπλευρα $B\Delta GE$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)
 ii. Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)
- β) Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$. (Μονάδες 9)

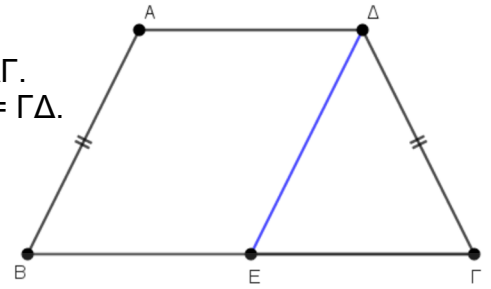
5.11 – Ισοσκελές τραπέζιο

ΘΕΜΑ 2°

396. ΘΕΜΑ 13497

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AD \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$.
Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $\widehat{A\Delta\Gamma}$.
(Μονάδες 12)
- β) Αν $\widehat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
(Μονάδες 13)

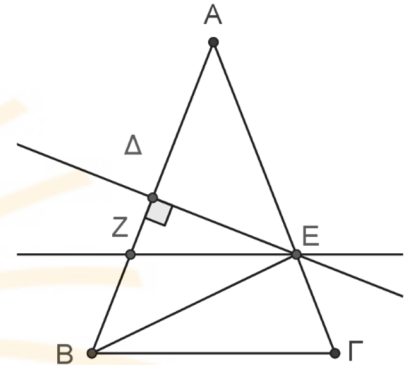


397. ΘΕΜΑ 34385

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .
Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

- α) Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.
(Μονάδες 15)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(Μονάδες 10)



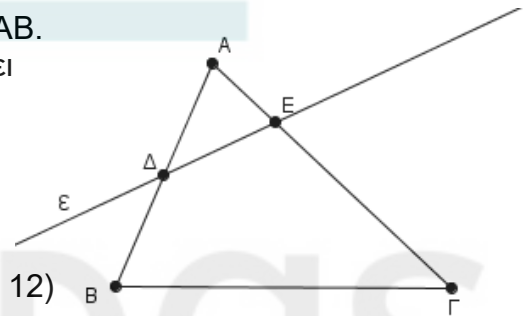
398. ΘΕΜΑ 34392

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB .

Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E .

Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

- α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)
- β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)

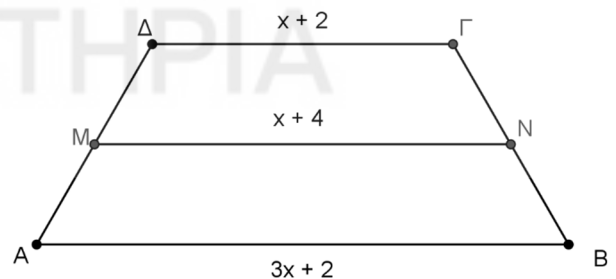


399. ΘΕΜΑ 34409

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

- α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι: $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.
(Μονάδες 12)

- β) Αν η γωνία Γ είναι διπλάσια της γωνίας B , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
(Μονάδες 13)



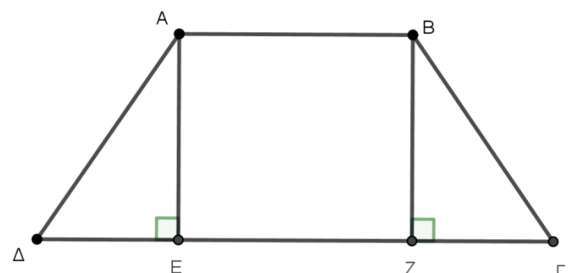
400. ΘΕΜΑ 34491

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$).

Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E = \Gamma Z$.
(Μονάδες 12)
- β) $AZ = BE$.
(Μονάδες 13)



401. ΘΕΜΑ 34509

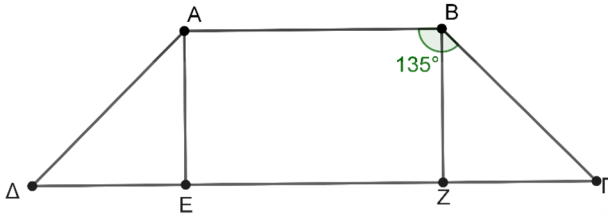
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$,

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)

402. ΘΕΜΑ 36106

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$

($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$.

Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

403. ΘΕΜΑ 36112

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

404. ΘΕΜΑ 36337

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

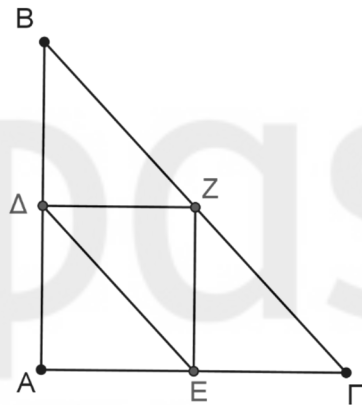
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 13)

**405. ΘΕΜΑ 36340**

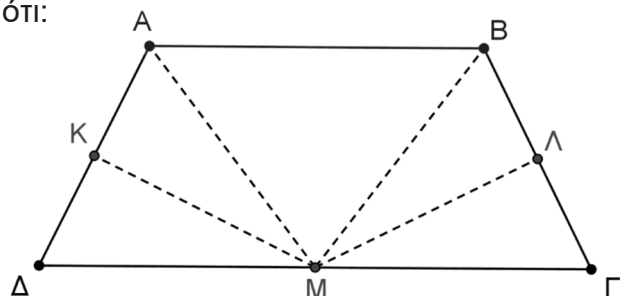
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

**406. ΘΕΜΑ 37010**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$.

Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπέζιου,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

407. ΘΕΜΑ 12418

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο ABE με βάση AB .

Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AED και BEG είναι ίσα. (Μονάδες 11)

β) Η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AEB}$. (Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 4^ο

408. ΘΕΜΑ 1736

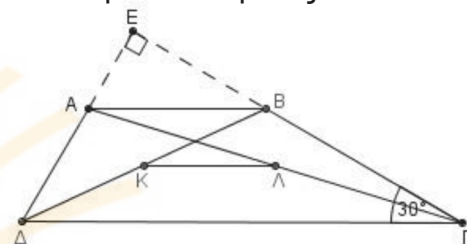
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνοντας κάθετα στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$. (Μονάδες 10)

β) $K\Lambda = A\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



409. ΘΕΜΑ 1742

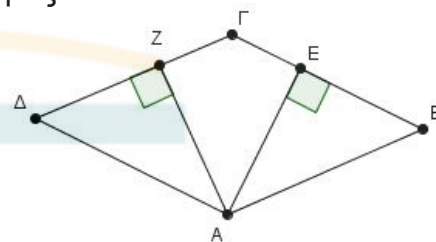
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος.

Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE . (Μονάδες 9)

γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών AD και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $MN \parallel ZE$ και $ZM = EN$. (Μονάδες 10)



410. ΘΕΜΑ 1755

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι $\hat{B\Delta\Delta} = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$. (Μονάδες 8)

411. ΘΕΜΑ 1786

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $ME\Gamma$. (Μονάδες 8)

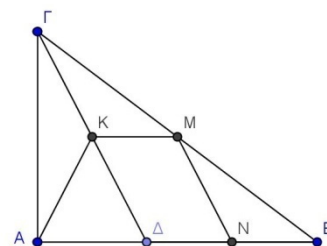
412. ΘΕΜΑ 1789

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KM\Delta N$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραπέζιου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$. (Μονάδες 8)



413. ΘΕΜΑ 1790

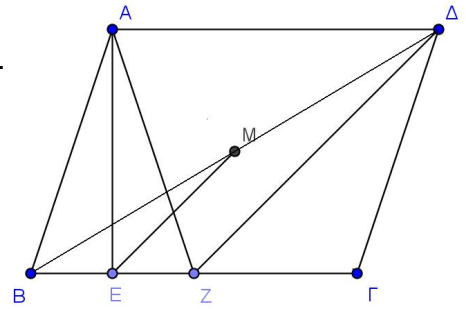
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου $AZ\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι

$$EM = \frac{A\Gamma}{2}. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

**414. ΘΕΜΑ 1791**

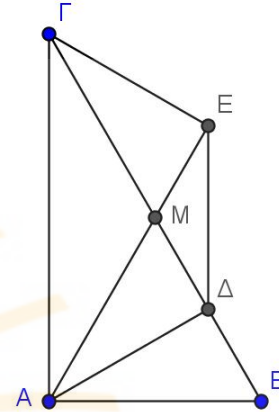
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσο του AM .

Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) $ME = MD = \frac{1}{4}$. (Μονάδες 9)

γ) Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

**415. ΘΕΜΑ 1797**

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου.

Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο;

Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας. (Μονάδες 12)

416. ΘΕΜΑ 1893

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)

ii. $AM = \frac{A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $M\Lambda N\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

417. ΘΕΜΑ 13539

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E , ώστε οι $A\Gamma, AE$ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

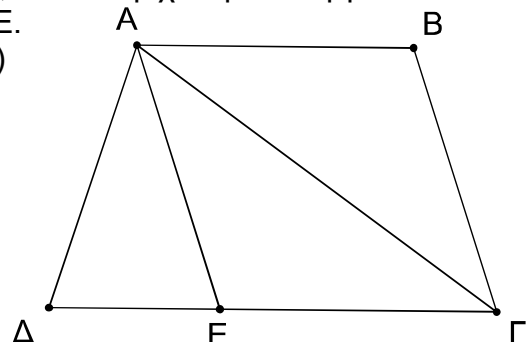
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



418. ΘΕΜΑ 13838

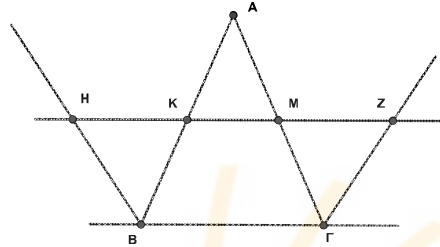
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με K, M τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 14)

**419. ΘΕΜΑ 14882**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M, K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Delta$ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Delta$.

(Μονάδες 7)

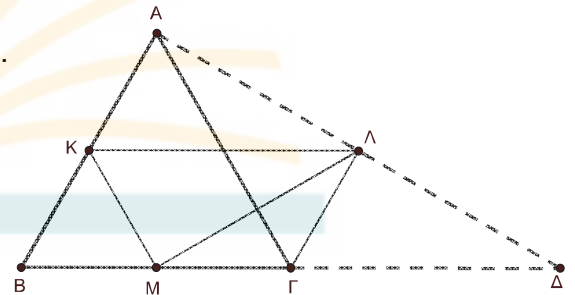
β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.

(Μονάδες 8)

ii) Το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

**420. ΘΕΜΑ 14885**

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

α) i. $AB = \Gamma E$

ii. $AB = B\Delta$

(Μονάδες 8)

β) $\hat{B}\Delta = \hat{B}\Gamma E$

(Μονάδες 8)

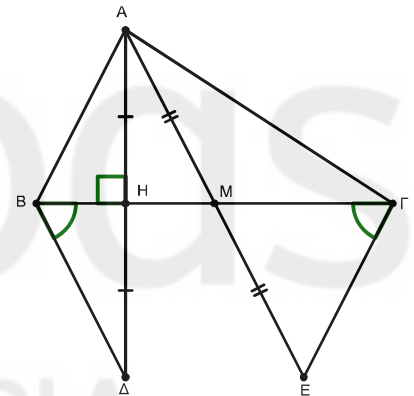
γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓE .

(Μονάδες 5)

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

**421. ΘΕΜΑ 34324**

Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ . Από σημείο A εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία B, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ να είναι 60° . Έστω ότι η ευθεία AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $OA = 2\rho$,

(Μονάδες 6)

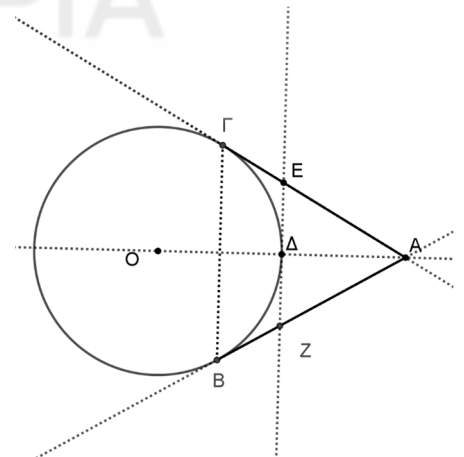
β) το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο,

(Μονάδες 5)

γ) $AZ = 2 \cdot ZB$,

(Μονάδες 7)

δ) το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)



422. ΘΕΜΑ 34331

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος AD .

Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $K\Lambda \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 5)
 β) i. $M\Lambda = K\Delta$ (Μονάδες 6)
 ii. Το τετράπλευρο $K\Lambda M\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)
 γ) Οι γωνίες $K\hat{\Delta}\Lambda$ και $K\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

423. ΘΕΜΑ 34333

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2 \cdot AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος BD . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την $A\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα, (Μονάδες 7)
 β) η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$, (Μονάδες 9)
 γ) το τετράπλευρο $AD\epsilon Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

424. ΘΕΜΑ 37089

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος BD .

Από το Δ φέρουμε $DE \perp A\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
 γ) Η ευθεία BD είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$. (Μονάδες 6)
 δ) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

425. ΘΕΜΑ 37098

Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία DE τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

426. ΘΕΜΑ 37099

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AH = HE$.

Να αποδείξετε ότι:

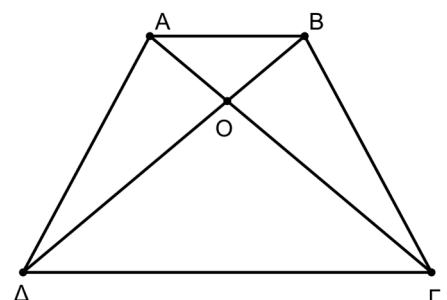
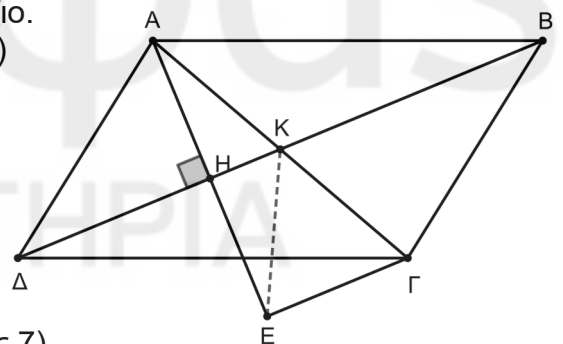
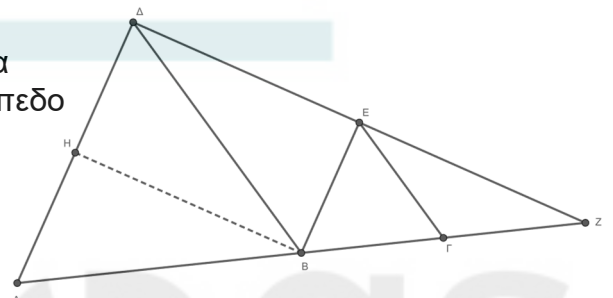
- α) Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
 γ) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

427. ΘΕΜΑ 37103

Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν:

$AD = B\Gamma, A\Gamma = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.

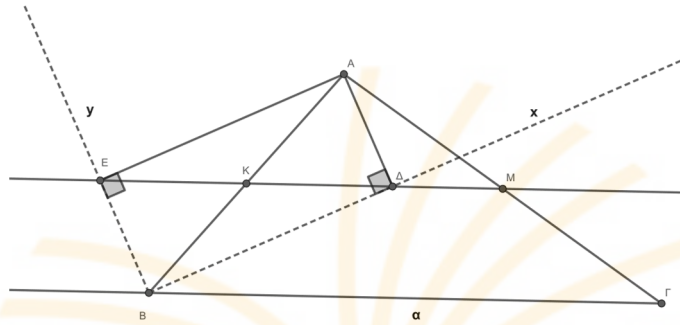
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$. (Μονάδες 8)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



428. ΘΕΜΑ 37107

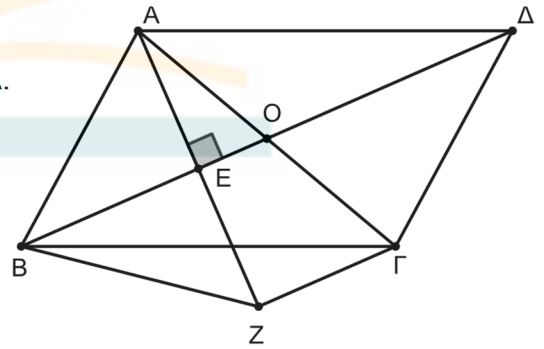
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος Bx της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας $\hat{B}$. Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)
 β) Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$. (Μονάδες 10)
 γ) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3 \cdot \alpha}{4}$, όπου $\alpha = B\Gamma$. (Μονάδες 8)

**429. ΘΕΜΑ 37114**

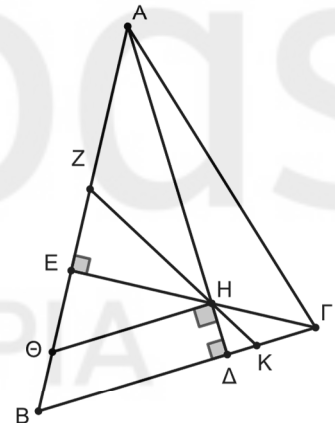
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB < A\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την $A\epsilon$ κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Εάν Z είναι το συμμετρικό του A ως προς τη διαγώνιο $B\Delta$ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ , τότε να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) $Z\Gamma = 2OE$. (Μονάδες 9)
 γ) Το $B\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

**430. ΘΕΜΑ 37118**

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε την KZ διχοτόμο της γωνίας ϵHA και ΘH κάθετο στο ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

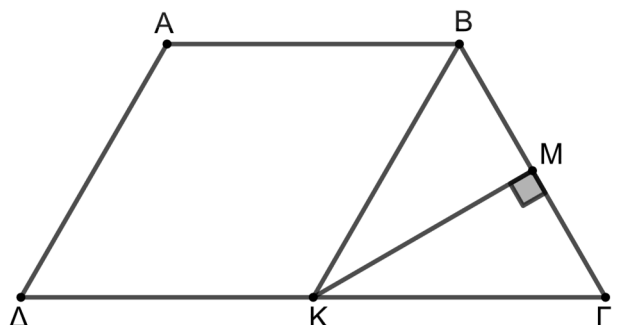
- α) Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH = 2EZ$. (Μονάδες 9)
 β) Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

**431. ΘΕΜΑ 37128**

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι:
 i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
 ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$. (Μονάδες 7)



432. ΘΕΜΑ 37129

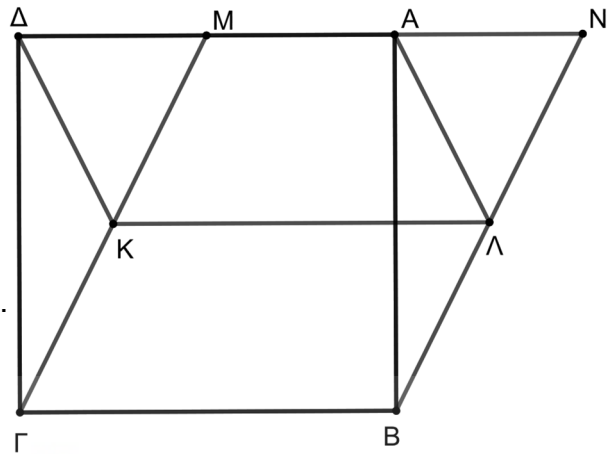
Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A)

κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$.

Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο $\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

**433. ΘΕΜΑ 37130**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$.

Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία BEZ είναι ορθή. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

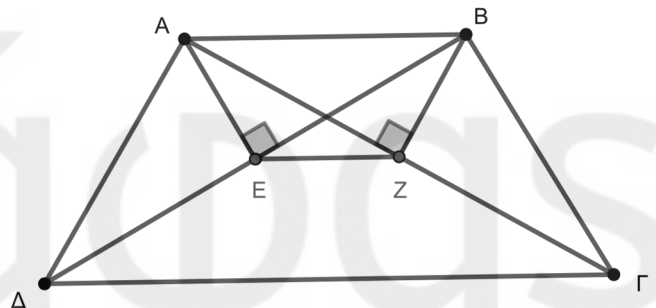
434. ΘΕΜΑ 37135

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$.

Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγωνίους $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
- β) $AE = BZ$. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)
- δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 5)

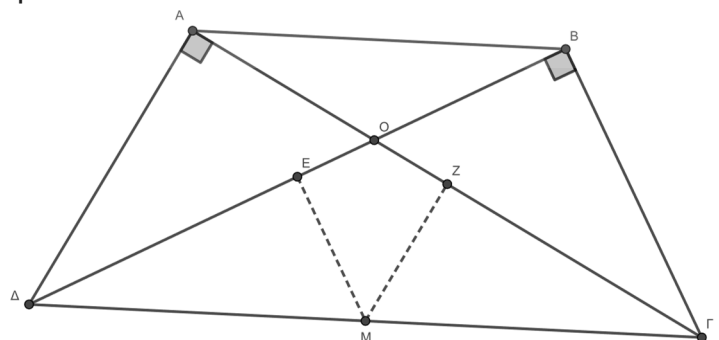
**435. ΘΕΜΑ 37139**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $ME = MZ$. (Μονάδες 6)
- β) Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$. (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $M\Gamma Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Η OM είναι μεσοκάθετη του EZ . (Μονάδες 6)



436. ΘΕΜΑ 37161

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και KZE είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου και μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

Οπότε και το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma K$ έχουν:

1. $BK = K\Gamma$

2. $\hat{B}AK = \hat{G}AK$ επειδή AK διχοτόμος της A

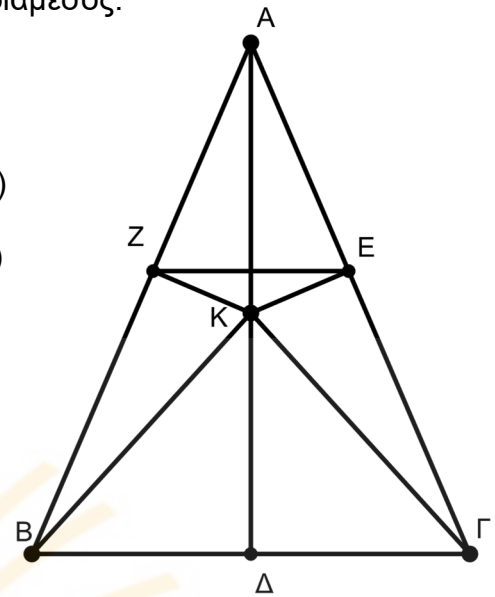
3. $\hat{ABK} = \hat{A\Gamma K}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου $\Gamma-\Pi-\Gamma$ »

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής.

Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο $\Gamma-\Pi-\Gamma$ διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$.

(Μονάδες 7)

**437. ΘΕΜΑ 37162**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες. (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες. (Μονάδες 9)