

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

§2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

ΘΕΜΑ 2°

1. ΘΕΜΑ 12685

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι :

$$(\alpha + \beta) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$

Μονάδες 12

β) $\alpha = \beta.$

Μονάδες 13

2. ΘΕΜΑ 13053

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι : i. $\beta + \gamma = -\alpha.$

Μονάδες 6

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$

Μονάδες 6

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα

$$\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} \text{ και να αποδείξετε ότι } \frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

Μονάδες 13

3. ΘΕΜΑ 13088

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε: $A = 2 \cdot (x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2.$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

Μονάδες 12

4. ΘΕΜΑ 13472

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha.$

α) Να αποδείξετε ότι: i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta.$

Μονάδες 8

ii. $\alpha + \beta = 1.$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2.$

Μονάδες 9

5. ΘΕΜΑ 14458

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y) \cdot (x + y) = 9xy.$

α) Να αποδείξετε ότι : i. $(2y - x)^2 = 0.$

Μονάδες 8

ii. $y = \frac{x}{2}.$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2.$

Μονάδες 12

6. **ΘΕΜΑ 14473**

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

Μονάδες 12

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}.$$

Μονάδες 13

7. **ΘΕΜΑ 14555**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

Μονάδες 13

8. **ΘΕΜΑ 35388**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq \delta$,

ώστε να ισχύουν $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}$.

Μονάδες 15

9. **ΘΕΜΑ 36884**

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3°

10. **ΘΕΜΑ 14329**

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4°**11. ΘΕΜΑ 15052**

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του.

Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

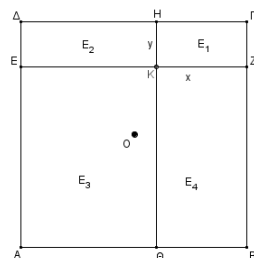
α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.



Μονάδες 8

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Μονάδες 5

§2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών**ΘΕΜΑ 2°****12. ΘΕΜΑ 12673**

Έστω πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι $\beta^3 + \frac{3}{\beta} < \alpha^3 + \frac{3}{\alpha}$.

Μονάδες 12

13. ΘΕΜΑ 12922

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες $A = 0$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$A - B = 0$.

Μονάδες 8

14. ΘΕΜΑ 13266

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

Μονάδες 8

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

Μονάδες 9

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

Μονάδες 8

15. ΘΕΜΑ 13323

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0.$$

Μονάδες 13

16. ΘΕΜΑ 14410

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

Μονάδες 8

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

17. ΘΕΜΑ 14475

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

Μονάδες 12

β) $\alpha - \beta$.

Μονάδες 13

18. ΘΕΜΑ 14492

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες 12

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες 13

19. ΘΕΜΑ 14704

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

Μονάδες 5

β) $2x - 3y$

Μονάδες 10

γ) $\frac{x}{y}$

Μονάδες 10

20. ΘΕΜΑ 35040

Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

Μονάδες 3

β) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

Μονάδες 10

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

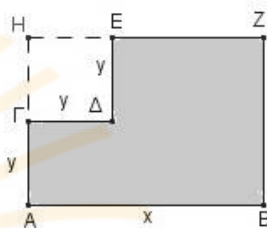
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

21. ΘΕΜΑ 35549

Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta E\eta$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2x + 4y$.



Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου;

Μονάδες 15

22. ΘΕΜΑ 36899

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Να αποδείξετε ότι: α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$,

Μονάδες 12

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

Μονάδες 13

23. ΘΕΜΑ 37179

Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

Μονάδες 12

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Μονάδες 13

24. ΘΕΜΑ 37817

Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

Μονάδες 15

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

Μονάδες 5

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο**25. ΘΕΜΑ 14602**

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

Μονάδες 13

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους

αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

Μονάδες 12

26. ΘΕΜΑ 14713

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

Μονάδες 7

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει :

i. $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$.

Μονάδες 8

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο**27. ΘΕΜΑ 14820**

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

Μονάδες 4

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

Μονάδες 5

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή

$\frac{9}{16}$.

Μονάδες 6

§2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
ΘΕΜΑ 2^ο

28. ΘΕΜΑ 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. **Μονάδες 8**

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$ **Μονάδες 8**

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1. **Μονάδες 9**

29. ΘΕΜΑ 14071

α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K = |x + 1| + |x - 2|$

B. $K = |x - 1| + |x + 2|$

Γ. $K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

β) Αν είναι $K = |x + 1| + |x - 2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$.

Μονάδες 10

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$. **Μονάδες 10**

30. ΘΕΜΑ 14412

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$. **Μονάδες 12**

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$. **Μονάδες 13**

31. ΘΕΜΑ 14730

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε :

i. την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$. **Μονάδες 8**

ii. τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$. **Μονάδες 10**

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 7**

32. ΘΕΜΑ 15054

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός. **Μονάδες 16**

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

Μονάδες 9

33. ΘΕΜΑ 35030

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . **Μονάδες 10**

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|.$$

Μονάδες 15

34. ΘΕΜΑ 35033

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

Μονάδες 16

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

35. ΘΕΜΑ 35041

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

Μονάδες 12

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x| \text{ είναι ανεξάρτητη του } x.$$

Μονάδες 13

36. ΘΕΜΑ 35112

Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$,

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

Μονάδες 12

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4.$$

Μονάδες 13

37. ΘΕΜΑ 35412

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές, **Μονάδες 10**

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}.$$
 Μονάδες 15

38. ΘΕΜΑ 35415

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $A = 2x - 3$. **Μονάδες 13**

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 12

39. ΘΕΜΑ 36894

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. **Μονάδες 15**

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$. **Μονάδες 10**

40. ΘΕΜΑ 36898

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

Μονάδες 15

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1);
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

41. ΘΕΜΑ 37201

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$.

Μονάδες 12

β) $0 < A < 4$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4°

42. ΘΕΜΑ 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

Μονάδες 7

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

Μονάδες 7

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$

Μονάδες 5

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει

$$\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right|.$$

Μονάδες 6

43. ΘΕΜΑ 33888

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β . **Μονάδες 13**

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά, είτε αλγεβρικά.

Μονάδες 12

44. ΘΕΜΑ 36672

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i) $|x + 2|$,

Μονάδες 4

ii) $|x - 7|$.

Μονάδες 4

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|x + 2| + |x - 7|$. **Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.

Μονάδες 5

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Μονάδες 7

45. ΘΕΜΑ 36673

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε :

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Μονάδες 8

§2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών
ΘΕΜΑ 2°

46. **ΘΕΜΑ 12943**

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

Μονάδες 13

47. **ΘΕΜΑ 14452**

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

Μονάδες 15

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

Μονάδες 10

48. **ΘΕΜΑ 14599**

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

Μονάδες 13

49. **ΘΕΜΑ 14682**

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

Μονάδες 12

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

Μονάδες 13

50. **ΘΕΜΑ 14750**

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι: α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$.

Μονάδες 12

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

Μονάδες 13

51. **ΘΕΜΑ 14774**

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

Μονάδες 13

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο

θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Μονάδες 12

52. **ΘΕΜΑ 14849**

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

Μονάδες 8

53. ΘΕΜΑ 15051

α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το

ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

Μονάδες 13

54. ΘΕΜΑ 34152

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$,

όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Μονάδες 7

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

Μονάδες 8

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

Μονάδες 10

55. ΘΕΜΑ 34157

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$ και $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

Μονάδες 13

56. ΘΕΜΑ 36778

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 12

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 13

57. ΘΕΜΑ 37192

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1,41$, $\sqrt{3} \cong 1,73$, $\sqrt{5} \cong 2,24$, $\sqrt{7} \cong 2,64$.

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

Μονάδες 12+13

58. ΘΕΜΑ 37197

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. **Μονάδες 13**

β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$. **Μονάδες 12**

59. ΘΕΜΑ 37198

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. **Μονάδες 13**

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι $B^2 + 6B = B^4$. **Μονάδες 12**

60. ΘΕΜΑ 37199

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι $A - B = 4$. **Μονάδες 13**

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 3^ο

61. ΘΕΜΑ 14805

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει

$$\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2 \cdot |\sqrt{2} - 2|.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε $\sqrt{2} = 1,41$) **Μονάδες 10**

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2.$$

Μονάδες 10

62. ΘΕΜΑ 34155

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

Μονάδες 15

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

Μονάδες 10

63. ΘΕΜΑ 37172

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις :

$$A = (\sqrt{2})^6, B = (\sqrt{3})^6 \text{ και } \Gamma = (\sqrt{6})^6.$$

α) Να δείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$.

Μονάδες 13

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4°

64. ΘΕΜΑ 14931

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

Μονάδες 8

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

Μονάδες 10

§3.1 Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού – εξισώσεις με απόλυτες τιμές

ΘΕΜΑ 2°

65. ΘΕΜΑ 12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

Μονάδες 7

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Μονάδες 8

66. ΘΕΜΑ 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

Μονάδες 15

67. ΘΕΜΑ 14224

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0, x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

Μονάδες 8

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

Μονάδες 8

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

68. **ΘΕΜΑ 14649**

Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

Μονάδες 12

β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K , α ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 13

69. **ΘΕΜΑ 34146**

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$,

Μονάδες 5

ii) όταν $\alpha = -3$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Μονάδες 12

70. **ΘΕΜΑ 34872**

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

Μονάδες 12

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

71. **ΘΕΜΑ 36896**

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

Μονάδες 9

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4°

72. ΘΕΜΑ 13170

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\%$).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x \in \mathbb{R}$ με επιτόκιο $\varepsilon\%$, ύστερα από δύο έτη θα

$$\text{εισπράξουμε κεφάλαιο } x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \text{ €}.$$

Μονάδες 7

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €.

Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2.$$

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

Μονάδες 8

§3.2 Η εξίσωση $x^y = a$

ΘΕΜΑ 3°

73. ΘΕΜΑ 14052

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

Μονάδες 10

§3.3 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

ΘΕΜΑ 2°

74. ΘΕΜΑ 14741

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha \cdot (\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

Μονάδες 13

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα

$$K(K - 2) = 0.$$

Μονάδες 6

75. ΘΕΜΑ 34150

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α , β , τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -64$.

Μονάδες 8

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α , β .

Μονάδες 10

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α , β .

Μονάδες 7

76. ΘΕΜΑ 34154

Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$.

α) Να δείξετε ότι $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 12

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A , B .

Μονάδες 13

77. ΘΕΜΑ 34161

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

Μονάδες 12

β) Αν α , β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), με $\alpha < \beta$, τότε να λύσετε την εξίσωση $ax^2 + \beta x + 3 = 0$.

Μονάδες 13

78. ΘΕΜΑ 34436

Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι : i) $A + B = \frac{1}{2}$, ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$.

Μονάδες 8+8

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

Μονάδες 9

79. ΘΕΜΑ 34920

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + x - 1$ (1).

α) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Μονάδες 13

β) Αν $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$ να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού

που έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

Μονάδες 12

80. ΘΕΜΑ 35038

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

81. ΘΕΜΑ 35100

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

Μονάδες 15

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

Μονάδες 10

82. ΘΕΜΑ 35382

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

Μονάδες 10

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

Μονάδες 8

83. ΘΕΜΑ 36890

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

Μονάδες 10

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του (α) ερωτήματος.

Μονάδες 15

84. ΘΕΜΑ 37171

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν :

$\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -15$.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

85. ΘΕΜΑ 37178

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μ. και x μ.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

Μονάδες 10

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Μονάδες 15

86. ΘΕΜΑ 37181

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

Μονάδες 13

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3°

87. **ΘΕΜΑ 14578**

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}. \quad \text{Μονάδες 10}$$

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την

$$\text{εξίσωση: } \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0. \quad \text{Μονάδες 15}$$

88. **ΘΕΜΑ 14749**

α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση:

$$A = \frac{x}{x - |x|}. \quad \text{Μονάδες 9}$$

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A ,

$$\text{να δείξετε ότι } A = \frac{1}{2}. \quad \text{Μονάδες 7}$$

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2.$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4°

89. **ΘΕΜΑ 12683**

Η δεξαμενή του διπλανού σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της.

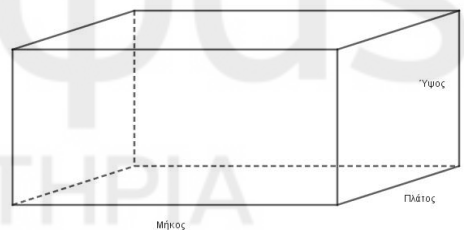
Μονάδες 8

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 .

Μονάδες 9

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

Μονάδες 8



90. **ΘΕΜΑ 14406**

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

Μονάδες 7

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με

άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 5

91. **ΘΕΜΑ 14490**

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

Μονάδες 5

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

Μονάδες 6

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να

υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

Μονάδες 4

92. **ΘΕΜΑ 14543**

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha = 2k + 1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3, 5, 7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

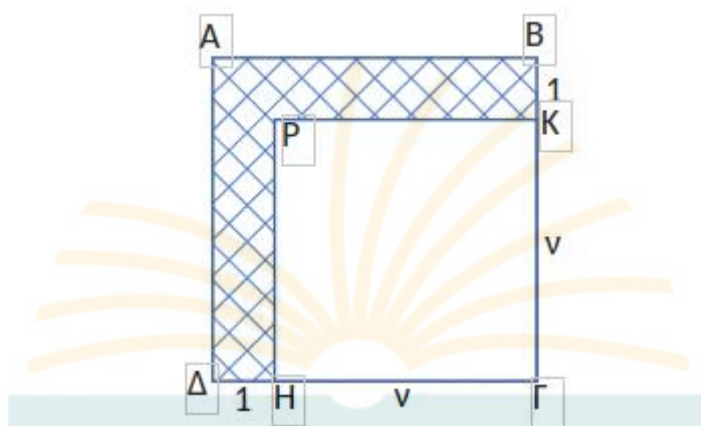
Μονάδες 6

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

Μονάδες 6

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. **Μονάδες 6**

- γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ABΓΔ και ΓHPK είναι τετράγωνα με $(ΓΗ) = (ΓΚ) = v$ και $(BK) = (ΔΗ) = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου v . **Μονάδες 7**



93. **ΘΕΜΑ 14651**

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$, όπου $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε:

- την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .
- το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

Μονάδες 6+6

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

Μονάδες 7

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Μονάδες 6

94. **ΘΕΜΑ 14759**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6ax + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36.$$

Μονάδες 6

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

Μονάδες 6

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να

$$\text{δείξετε ότι ισχύει: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

Μονάδες 5

95. ΘΕΜΑ 33584

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. **Μονάδες 6**

β) Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$. **Μονάδες 4**

γ) Αν για τις x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$. **Μονάδες 7**

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ . **Μονάδες 8**

96. ΘΕΜΑ 33585

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = (a^2 + 1)^2.$$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = a$ και

$$\rho_2 = -\frac{1}{a}.$$

Μονάδες 10

γ) Να βρεθούν οι τιμές του a , ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. **Μονάδες 10**

97. ΘΕΜΑ 33826

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. **Μονάδες 10**

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε :

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$, **Μονάδες 3**

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. **Μονάδες 12**

98. ΘΕΜΑ 33889

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0$$
 (2). **Μονάδες 10**

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha, \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ και **Μονάδες 5**

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). **Μονάδες 10**

99. **ΘΕΜΑ 34310**

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

Μονάδες 8

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

Μονάδες 10

100. **ΘΕΜΑ 34327**

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

Μονάδες 10

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

Μονάδες 7

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

Μονάδες 8

101. **ΘΕΜΑ 34390**

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14$ cm και μια διαγώνιος $\delta = 5$ cm.

α) i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12$ cm².

Μονάδες 7

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

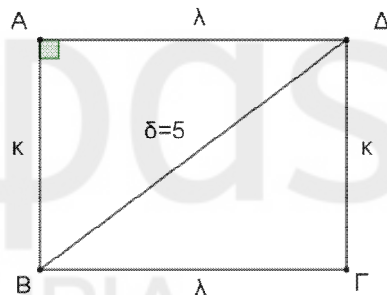
Μονάδες 7

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14$ cm πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$.

Μονάδες 7



102. ΘΕΜΑ 34544

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1), με άγνωστο x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$. **Μονάδες 7**

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ . **Μονάδες 9**

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1). **Μονάδες 9**

103. ΘΕΜΑ 36651

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$. **Μονάδες 8**

β) i) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. **Μονάδες 3+6**

γ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$, να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. **Μονάδες 8**

104. ΘΕΜΑ 36661

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού. **Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. **Μονάδες 7**

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. **Μονάδες 6**

105. ΘΕΜΑ 36663

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d + 1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. **Μονάδες 6**

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. **Μονάδες 12**

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. **Μονάδες 7**

106. ΘΕΜΑ 36675

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. **Μονάδες 10**

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) να βρείτε το $S = x_1 + x_2$,

ii) να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ . **Μονάδες 5**

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ . **Μονάδες 10**

§4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού / ανισώσεις με απόλυτες τιμές

ΘΕΜΑ 2^ο

107. ΘΕΜΑ 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$.

Μονάδες 7

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με

$B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

Μονάδες 9

108. ΘΕΜΑ 13025

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3 - 2x}{7} \geq 5$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$.

Μονάδες 10

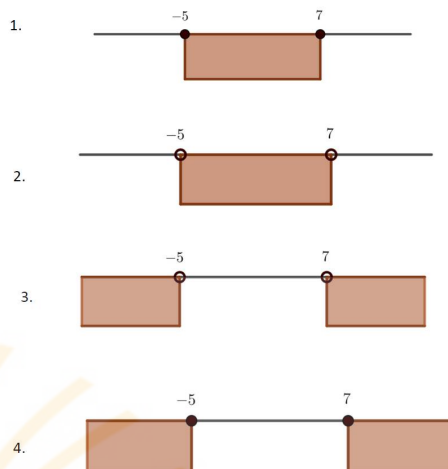
γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες 5

109. **ΘΕΜΑ 14295**

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις διπλανές αναπαραστάσεις: **Μονάδες 12**

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα. **Μονάδες 13**



110. **ΘΕΜΑ 14319**

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$.

α) Να λύσετε την ανίσωση. **Μονάδες 12**

β) Αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου: $A = (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 5)$. **Μονάδες 13**

111. **ΘΕΜΑ 14491**

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$. **Μονάδες 12**

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. **Μονάδες 13**

112. **ΘΕΜΑ 14572**

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι: α) $-3 < x < -1$, **Μονάδες 10**

β) $|2x + 4| < 2$. **Μονάδες 15**

113. **ΘΕΜΑ 14617**

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$. **Μονάδες 12**

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$. **Μονάδες 13**

114. **ΘΕΜΑ 34148**

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$, **Μονάδες 9**

ii) $|2x - 3| \geq 1$. **Μονάδες 9**

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. **Μονάδες 7**

115. ΘΕΜΑ 34149

- α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ (1). **Μονάδες 9**
β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 2$ (2). **Μονάδες 9**
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). **Μονάδες 7**

116. ΘΕΜΑ 35043

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 2| < 3$.
α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 5$. **Μονάδες 12**

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$.

Μονάδες 13

117. ΘΕΜΑ 35044

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $y \in (1, 3)$. **Μονάδες 12**

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$.

Μονάδες 13

118. ΘΕΜΑ 35404

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει :
 $|y - 3| < 1$. **Μονάδες 15**

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$. **Μονάδες 10**

119. ΘΕΜΑ 36777

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. **Μονάδες 12**

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y . **Μονάδες 13**

120. ΘΕΜΑ 36886

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$. **Μονάδες 8**

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$. **Μονάδες 8**

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Μονάδες 9

121. ΘΕΜΑ 36888

Δίνονται οι ανισώσεις : $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

Μονάδες 10

122. ΘΕΜΑ 36893

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| \leq 7$.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 1| > 2$.

Μονάδες 9

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

Μονάδες 7

123. ΘΕΜΑ 36895

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x + 4| = 10$.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| > 1$.

Μονάδες 9

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

124. ΘΕΜΑ 37170

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση : $T = 15 + 25x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

125. ΘΕΜΑ 37191

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$,

Μονάδες 9

ii) $|1 - 2x| \geq 1$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες 7

126. ΘΕΜΑ 37193

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 13

127. ΘΕΜΑ 37195

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι $A^2 + A - 6 = 0$.

Μονάδες 12

128. ΘΕΜΑ 37196

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 12

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

Μονάδες 13

129. ΘΕΜΑ 37200

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση $|x+1| < 2$, τότε να δείξετε ότι :

α) $x \in (-3, 1)$,

Μονάδες 12

β) η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός

ανεξάρτητος του x .

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3°

130. ΘΕΜΑ 14753

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

Μονάδες 5

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές: $A = |2x - 3| - |4 - 3x|$

Μονάδες 10

131. ΘΕΜΑ 35296

- α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$. **Μονάδες 8**
β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. **Μονάδες 9**
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4^ο

132. ΘΕΜΑ 13114

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x - 1| - |3 - 3x| + |2x - 4|}{2}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$. **Μονάδες 9**
β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της. **Μονάδες 8**
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. **Μονάδες 8**

133. ΘΕΜΑ 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. **Μονάδες 7**
β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:
i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. **Μονάδες 6**
ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. **Μονάδες 5**
γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. **Μονάδες 7**

134. ΘΕΜΑ 13474

Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| \leq \sqrt{3}$ (1) και $3 - \frac{x + 4}{2} < 0$ (2)

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). **Μονάδες 5**
β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). **Μονάδες 5**
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). **Μονάδες 7**
δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α , β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους. **Μονάδες 8**

135. ΘΕΜΑ 14650

- α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1). **Μονάδες 7**
- β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$. **Μονάδες 5**
- γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$. **Μονάδες 5**
- δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 8**

136. ΘΕΜΑ 33893

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$. **Μονάδες 10**
- β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη του 4.
- i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.
- ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. **Μονάδες 5+10**

137. ΘΕΜΑ 33896

- Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.
- α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. **Μονάδες 7**
- β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . **Μονάδες 6**
- γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. **Μονάδες 6**
- δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. **Μονάδες 6**

138. ΘΕΜΑ 33586

- Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.
- α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος K (v) της επιχείρησης, εάν γεμίζει v τόνερ το μήνα. **Μονάδες 5**
- β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα E (v) της επιχείρησης από την πώληση v τόνερ το μήνα. **Μονάδες 5**
- γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η

επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

Μονάδες 7

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Μονάδες 8

139. ΘΕΜΑ 34322

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ;

Μονάδες 4

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20 , ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ;

Μονάδες 6

γ) i) Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή: $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$

Μονάδες 2

ii) Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο

εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .

Μονάδες 6

iii) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ .

Μονάδες 7

140. ΘΕΜΑ 34325

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0 \quad (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

Μονάδες 6

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

Μονάδες 9

141. ΘΕΜΑ 36671

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

Μονάδες 5

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

Μονάδες 10

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x + 4| + |x - 14| = 18$.

Μονάδες 5

§4.2 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού / παραγοντοποίηση τριωνύμου
ΘΕΜΑ 2^ο

142. ΘΕΜΑ 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

Μονάδες 12

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$.

Μονάδες 13

143. ΘΕΜΑ 12976

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την ανίσωση $x \cdot (1 - 2x) \leq -1$.

Μονάδες 13

144. ΘΕΜΑ 13321

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

Μονάδες 8

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

Μονάδες 8

145. ΘΕΜΑ 14189

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

Μονάδες 12

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$, με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α).

Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

Μονάδες 13

146. ΘΕΜΑ 14474

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

Μονάδες 12

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Μονάδες 13

147. ΘΕΜΑ 14577

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

Μονάδες 8

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}, x \neq 0, x \neq -1.$$

Μονάδες 9

148. ΘΕΜΑ 34162

α) Να λύσετε τις ανισώσεις $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

Μονάδες 16

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

Μονάδες 9

149. ΘΕΜΑ 34919

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1). **Μονάδες 13**

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$, να δείξετε ότι η παράσταση

$A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 12

150. ΘΕΜΑ 35035

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 13

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

151. ΘΕΜΑ 36887

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :
 $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

Μονάδες 5

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

Μονάδες 10

152. ΘΕΜΑ 36892

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$. **Μονάδες 9**

β) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$. **Μονάδες 9**

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

Μονάδες 7

153. ΘΕΜΑ 37168

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). **Μονάδες 12**

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Μονάδες 13

154. ΘΕΜΑ 37169

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2.$$

Μονάδες 12

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Μονάδες 13

155. ΘΕΜΑ 37182

α) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$.

Μονάδες 8

β) Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 12

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών

αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

156. ΘΕΜΑ 38203

α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 25 = 0$.

Μονάδες 7

β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 36 \leq 0$.

Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

157. ΘΕΜΑ 14601

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $0 < x < 1$.

Μονάδες 12

β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1, x, x^2$.

Μονάδες 13

158. ΘΕΜΑ 34910

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).

Μονάδες 13

β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης

(1).

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4°

159. ΘΕΜΑ 13174

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1} \quad \text{και} \quad B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}.$$

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B ;

Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την ανίσωση : $B - A < 2 \cdot d(x, 4) - 5$.

Μονάδες 9

160. ΘΕΜΑ 13176

Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

Μονάδες 8

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των

ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$

κοινή τους λύση;

Μονάδες 4

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός

$\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

Μονάδες 5

161. ΘΕΜΑ 13368

Στο διπλανό σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\Theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$

είναι α και η απόσταση των

κορυφών του $EZH\Theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$

είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα,

να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δίνεται από τη σχέση:

$$(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2, \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq \alpha.$$

Μονάδες 6

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δεν μπορεί να είναι

μικρότερο από το μισό του εμβαδού $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες 11

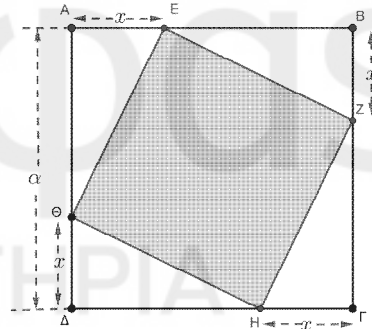
γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$,

το εμβαδόν του $EZH\Theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του

$$AB\Gamma\Delta, \text{ δηλαδή: } (EZH\Theta) = \frac{2}{3} (AB\Gamma\Delta).$$

Μονάδες 8

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)



162. ΘΕΜΑ 14123

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - ax - (a+1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου. **Μονάδες 7**

β) Αν είναι $a > -2$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $a+1$. **Μονάδες 4**

(ii) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - ax - (a+1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024. **Μονάδες 7**

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{a}{2}\right)$. **Μονάδες 7**

163. ΘΕΜΑ 14615

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες. **Μονάδες 6**

β) Να λύσετε την εξίσωση. **Μονάδες 7**

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8. **Μονάδες 6**

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$. **Μονάδες 6**

164. ΘΕΜΑ 14652

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. **Μονάδες 8**

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α , με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: 0, 1, α , α^2 , $\sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. **Μονάδες 10**

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: α , α^2 , $\frac{\alpha + \alpha^2}{2}$. **Μονάδες 7**

165. ΘΕΜΑ 14653

Δίνεται η ανίσωση $|x - 1| \leq 3$ (1).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). **Μονάδες 7**

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). **Μονάδες 3**

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1). **Μονάδες 8**

- δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3. **Μονάδες 7**

166. **ΘΕΜΑ 14654**

- α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. **Μονάδες 10**

- β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2) \cdot (\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

Μονάδες 10

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1) \cdot (\beta - 2)| = (\alpha - 1) \cdot (\beta - 2)$.

Μονάδες 5

167. **ΘΕΜΑ 14924**

- α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

- β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi + 9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi + 9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου

$$\pi = 3,1415\dots$$

Μονάδες 9

- γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0, \text{ να δείξετε ότι } \alpha \in (-1, 1).$$

Μονάδες 8

168. **ΘΕΜΑ 14963**

Δίνεται η εξίσωση $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

- α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης. **Μονάδες 8**

- β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί. **Μονάδες 8**

- γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. **Μονάδες 9**

169. **ΘΕΜΑ 32682**

- α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$. **Μονάδες 4**
ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$. **Μονάδες 7**

- β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . **Μονάδες 7**

- ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$. **Μονάδες 7**

170. ΘΕΜΑ 33582

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{ cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

Μονάδες 4

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$.

Μονάδες 8

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

Μονάδες 6

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm .

Μονάδες 7

171. ΘΕΜΑ 33587

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .

Μονάδες 10

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

Μονάδες 7

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

Μονάδες 8

172. ΘΕΜΑ 33698

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

ii) Αν x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ , μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να

προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

173. ΘΕΜΑ 33711

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 2x - 8$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

Μονάδες 10

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, τότε η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι

μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης $\mu^2 - 2|\mu| - 8$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

174. ΘΕΜΑ 33712

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. **Μονάδες 4**

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; **Μονάδες 7**

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$;

Μονάδες 6

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ταυτόχρονα 0. **Μονάδες 8**

175. ΘΕΜΑ 33855

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. **Μονάδες 6**

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. **Μονάδες 6**

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$. **Μονάδες 6**

176. ΘΕΜΑ 33890

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$. (1) **Μονάδες 10**

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda - 1) \cdot (\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . **Μονάδες 8**

ii) Να δείξετε ότι $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$. **Μονάδες 7**

177. ΘΕΜΑ 33892

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$. **Μονάδες 8**

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$. **Μονάδες 5**

γ) Δίνεται το διπλανό παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$, όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$.

Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. **Μονάδες 7**

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. **Μονάδες 5**



178. **ΘΕΜΑ 34182**

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, με $x \in (0, 3)$.

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

Μονάδες 8

γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

179. **ΘΕΜΑ 34185**

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$

και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 7

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5 \cdot |\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

180. **ΘΕΜΑ 34186**

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

Μονάδες 6

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

Μονάδες 7

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Μονάδες 6

181. **ΘΕΜΑ 34319**

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 10

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες;

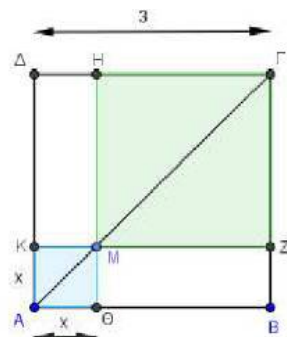
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10



182. ΘΕΜΑ 34323

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 10**

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

Μονάδες 6

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να δείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$,

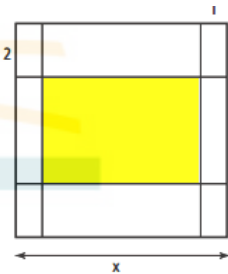
Μονάδες 4

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $f(x_2 + 1)$.

Μονάδες 5

183. ΘΕΜΑ 35724

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής

τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση $E(x) = (x - 2)(x - 4)$.

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

Μονάδες 7

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετράγωνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

Μονάδες 10

184. ΘΕΜΑ 36658

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

Μονάδες 8

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175 \text{ m}$;

Μονάδες 12

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m .

Μονάδες 12

185. ΘΕΜΑ 36669

Δίνονται οι ανισώσεις $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \text{ είναι κοινή τους λύση.}$$

Μονάδες 10

186. ΘΕΜΑ 36670

Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

Μονάδες 10

187. ΘΕΜΑ 36678

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α , με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος (α).

Μονάδες 10

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

Μονάδες 7

§5.1 Ακολουθίες

ΘΕΜΑ 4^ο

188. ΘΕΜΑ 13056

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. .	. . .		...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_v = \frac{v \cdot (v + 1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10° τριγωνικό αριθμό.

Μονάδες 6

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Μονάδες 10

§5.2 Αριθμητική πρόοδος ΘΕΜΑ 2^ο

189. **ΘΕΜΑ 13319**

Δίνονται οι αριθμοί $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

Μονάδες 12

190. **ΘΕΜΑ 14259**

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι ο $20^{\text{ος}}$ όρος της προόδου ισούται με 97.

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$.

Μονάδες 9

191. **ΘΕΜΑ 14476**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

Μονάδες 13

192. ΘΕΜΑ 14512

- α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. **Μονάδες 9**
- β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια
- i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . **Μονάδες 9**
- ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) . **Μονάδες 7**

193. ΘΕΜΑ 14573

- Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.
- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. **Μονάδες 10**
- β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. **Μονάδες 15**

194. ΘΕΜΑ 14574

- Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.
- α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. **Μονάδες 12**
- β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35. **Μονάδες 13**

195. ΘΕΜΑ 14597

- Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.
- α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήστε τον συλλογισμό σας. **Μονάδες 8**
- β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. **Μονάδες 8**
- γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά. **Μονάδες 9**

196. ΘΕΜΑ 14656

- Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.
- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. **Μονάδες 12**
- β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$. **Μονάδες 13**

197. ΘΕΜΑ 34145

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

Μονάδες 13

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Μονάδες 12

198. ΘΕΜΑ 34147

Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. **Μονάδες 12**

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 13**

199. ΘΕΜΑ 34153

Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α) Να βρείτε το x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. **Μονάδες 12**

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. **Μονάδες 13**

200. ΘΕΜΑ 34158

Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. **Μονάδες 12**

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται $\sqrt{1849} = 43$). **Μονάδες 13**

201. ΘΕΜΑ 34871

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $x + 1$, $3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 13**

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 12**

202. ΘΕΜΑ 34877

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1). **Μονάδες 13**

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 12**

203. ΘΕΜΑ 35046

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. **Μονάδες 12**

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

Μονάδες 13

204. ΘΕΜΑ 35143

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

Μονάδες 15

205. ΘΕΜΑ 35299

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.

Μονάδες 9

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

Μονάδες 8

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Μονάδες 8

206. ΘΕΜΑ 35375

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον α_{20} .

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

207. ΘΕΜΑ 35408

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε τη τιμή του x .

Μονάδες 10

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) , τότε :

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

Μονάδες 7

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 8

208. ΘΕΜΑ 36897

α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραιών $1, 2, 3, \dots, n$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3^ο

209. ΘΕΜΑ 34746

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$ (1), με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$. **Μονάδες 12**

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4^ο

210. ΘΕΜΑ 12694

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

Μονάδες 3 + 4

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι. **Μονάδες 6**

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. **Μονάδες 6**

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

Μονάδες 6

211. ΘΕΜΑ 12945

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και την αριθμητική πρόοδο $(\beta_n), n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_3 = 2$ και $\omega = 3$. **Μονάδες 7**

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

Μονάδες 8

γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n .

Μονάδες 10

212. ΘΕΜΑ 12764

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10^η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

- α) Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω .

Μονάδες 9

- β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

Μονάδες 9

- γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

Μονάδες 7

213. ΘΕΜΑ 14758

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

Μονάδες 6

- β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 6

- γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

Μονάδες 6

- δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

Μονάδες 7

214. ΘΕΜΑ 14809

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κ.ο.κ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

- α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (a_n) με $a_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

Μονάδες 6

- β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.

Μονάδες 10

- γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

Μονάδες 9

215. ΘΕΜΑ 13089

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, τη 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη.

Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη.

Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. **Μονάδες 4**

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. **Μονάδες 4**

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. **Μονάδες 7**

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. **Μονάδες 5**

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_n = \beta_{8-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$. **Μονάδες 5**

216. ΘΕΜΑ 13171

Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = S_n = 2n^2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 . **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$, $n \geq 2$. **Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 4n + 1$, $n \geq 1$. **Μονάδες 7**

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . **Μονάδες 7**

217. ΘΕΜΑ 13173

Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό τύπο $\alpha_n = 10n + 3$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 6+3**

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; **Μονάδες 8**

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. **Μονάδες 8**

218. ΘΕΜΑ 14927

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6.560ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11.910ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_n).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι

$$a_n = 107n + 1210. (1)$$

Μονάδες 9

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1),

Μονάδες 5

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

Μονάδες 6

219. ΘΕΜΑ 33579

Οι αριθμοί $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

Μονάδες 6

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i) τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 5

ii) τον πρώτο όρο της προόδου.

Μονάδες 6

iii) το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$.

Μονάδες 8

220. ΘΕΜΑ 32741

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα.

Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα: «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

Μονάδες 6

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90

μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να

πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2

παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή

πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

Μονάδες 13

221. ΘΕΜΑ 14962

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά $\omega = 3$.
Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2, 8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0 είναι όρος της (α_n) .

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_n) που υπάρχουν στο $\Delta = [2, 8]$.

Μονάδες 7

γ) Αν $\alpha_6 = 14$,

i. να βρείτε τον α_1 .

Μονάδες 6

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_n) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186. (Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

Μονάδες 6

222. ΘΕΜΑ 33581

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31)$.

Μονάδες 10

223. ΘΕΜΑ 33583

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

Μονάδες 8

β) Να εξετάσετε αν ο 333 είναι όρος της προόδου.

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της

παραπάνω προόδου (α_n) , τέτοιοι ώστε να ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Μονάδες 9

224. ΘΕΜΑ 33858

Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = k^2$ και $\alpha_3 = (k + 1)^2$,
 k ακέραιος με $k > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 8

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον k και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

Μονάδες 8

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

Μονάδες 9

225. ΘΕΜΑ 36650

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. **Μονάδες 4**

β) Αν, για κάθε $n \leq 51$ ο αριθμός αν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. **Μονάδες 6**

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης. **Μονάδες 7**

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

Μονάδες 8

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$)

226. ΘΕΜΑ 36674

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15, ... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

Μονάδες 7

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

Μονάδες 7

227. ΘΕΜΑ 36660

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

- α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το n -οστό όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

Μονάδες 6

- β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη;

Μονάδες 6

- γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

- i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη;

Μονάδες 6

- ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

Μονάδες 7

228. ΘΕΜΑ 36662

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

Μονάδες 10

- β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

Μονάδες 5

- γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και τη 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Μονάδες 10

229. ΘΕΜΑ 36653

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$, που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς και για την οποία ισχύουν $a_1 = x$, $a_2 = 2x^2 - 3x - 4$ και $a_3 = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $x = 3$.

Μονάδες 10

β) Να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

Μονάδες 8

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$.

Μονάδες 7

230. ΘΕΜΑ 37204

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά αυτής της προόδου.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

Μονάδες 4

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

Μονάδες 5

δ) Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε να βρείτε:

i) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα,

Μονάδες 5

ii) πόσοι είναι οι θεατές.

Μονάδες 6

§5.3 Γεωμετρική πρόοδος
ΘΕΜΑ 2^ο

231. ΘΕΜΑ 12763

Δίνεται μία πρόοδος a_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η a_n είναι αριθμητική πρόοδος.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η a_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

Μονάδες 13

232. ΘΕΜΑ 12787

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

Μονάδες 15

233. ΘΕΜΑ 14920

Μια γεωμετρική πρόοδος (a_n) έχει πρώτο όρο $a_1 = 4$, λόγο

$\lambda > 0$ και $\frac{a_3}{a_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

234. ΘΕΜΑ 34156

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

Μονάδες 10

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

Μονάδες 15

235. ΘΕΜΑ 34874

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

Μονάδες 12

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 13

236. ΘΕΜΑ 35042

- α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 13**
- β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:
- i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 6**
- ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου. **Μονάδες 6**

237. ΘΕΜΑ 35205

- α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί x , $2x + 1$, $5x + 4$ με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 13**
- β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:
- i) $x = 1$,
- ii) $x = -1$. **Μονάδες 12**

238. ΘΕΜΑ 36891

Σε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει :
 $a_3 = 1$ και $a_5 = 4$.

- α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. **Μονάδες 13**
- β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι
 $a_n = 2^{n-3}$. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 3°

239. ΘΕΜΑ 35037

Οι αριθμοί $k - 2$, $2k$ και $7k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

- α) Να αποδείξετε ότι $k = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. **Μονάδες 12**
- β) i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 . **Μονάδες 6**
- ii) Να αποδείξετε ότι $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$. **Μονάδες 7**

240. ΘΕΜΑ 35411

- α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x . **Μονάδες 9**
- β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x . **Μονάδες 9**
- γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4^ο**241. ΘΕΜΑ 12731**

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$).
Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. **Μονάδες 10**

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, ($\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$. **Μονάδες 7**

242. ΘΕΜΑ 12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) :

$$\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 5**

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^7$ **Μονάδες 5**

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της. **Μονάδες 7**

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$. **Μονάδες 8**

243. ΘΕΜΑ 14375

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. **Μονάδες 6**

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. βρείτε τις τιμές του μ .

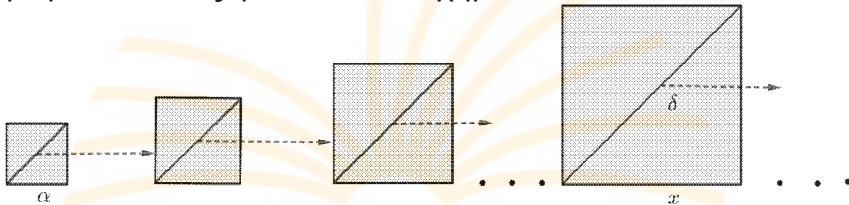
Μονάδες 7

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε τον λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 6

244. ΘΕΜΑ 14645

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = \alpha^2 \cdot 2^{n-1}$.

Μονάδες 7

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

Μονάδες 8

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.

Μονάδες 6

245. ΘΕΜΑ 33891

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .

Μονάδες 9

γ) Αν S_{10} , S'_{10} είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}.$$

Μονάδες 8

246. ΘΕΜΑ 34180

Δίνονται οι αριθμοί 2, x , 8, με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; **Μονάδες 5**

γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) .

ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να ισχύει $2(S_n + 24) = \beta_7$.

Μονάδες 7+8

247. ΘΕΜΑ 34181

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α , πλάτους β και εμβαδού E .

Οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

Μονάδες 10

β) Αν $E = 1$ και $\alpha + \beta = 10$,

i) να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα α , β .

ii) να βρείτε τις διαστάσεις α , β του ορθογωνίου.

Μονάδες 5+10

248. ΘΕΜΑ 36649

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204.800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102.400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51.200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; **Μονάδες 6**

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3.200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από τη στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. **Μονάδες 6**

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n . **Μονάδες 6**

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από τη στιγμή της επιδείνωσης; **Μονάδες 7**

249. ΘΕΜΑ 36677

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται: Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 1 ευρώ, το 2^ο μήνα 2 ευρώ, τον 3^ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 100 ευρώ, το 2^ο μήνα 110 ευρώ, τον 3^ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

- α) i) Να βρείτε το ποσό a_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
ii) Να βρείτε το ποσό b_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
iv) Να βρείτε το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

Μονάδες 4+4+5+5

- β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;
ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δυο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Μονάδες 3+4

250. ΘΕΜΑ 37205

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1^{ης} ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2^{ης} ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3^{ης} ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα. **Μονάδες 7**
β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.; **Μονάδες 9**
γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. **Μονάδες 9**

§6.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΘΕΜΑ 2^ο

251. ΘΕΜΑ 12765

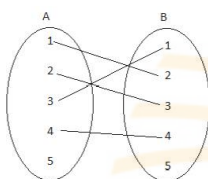
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **Μονάδες 13**

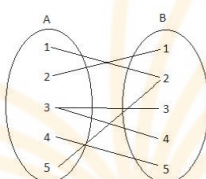
β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς -1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 6 , είναι αυτό δυνατό. **Μονάδες 12**

252. ΘΕΜΑ 12908

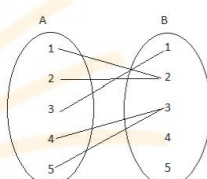
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχ.3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B . **Μονάδες 9**

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . **Μονάδες 4**

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f . **Μονάδες 4**

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$. **Μονάδες 8**

253. ΘΕΜΑ 12997

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' Λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B . **Μονάδες 10**

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή. **Μονάδες 15**

254. ΘΕΜΑ 13026

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$. **Μονάδες 10**

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

Μονάδες 15

255. ΘΕΜΑ 13031

Δίνεται η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $x = 0$,

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

Μονάδες 9

256. ΘΕΜΑ 13032

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.

Μονάδες 9

257. ΘΕΜΑ 14681

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

Μονάδες 13

258. ΘΕΜΑ 14728

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(1)$.

Μονάδες 12

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

Μονάδες 13

259. ΘΕΜΑ 14781

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

Μονάδες 12

260. ΘΕΜΑ 34446

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

Μονάδες 12

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

Μονάδες 13

261. ΘΕΜΑ 35298

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

Μονάδες 13

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

Μονάδες 12

262. ΘΕΜΑ 35405

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 15

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$.

Μονάδες 10

263. ΘΕΜΑ 37175

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & x < 0 \\ 2x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

Μονάδες 12

264. **ΘΕΜΑ 37185**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$. **Μονάδες 15**

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

Μονάδες 10

265. **ΘΕΜΑ 37189**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2).$$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

Μονάδες 15

266. **ΘΕΜΑ 37202**

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. **Μονάδες 12**

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

Μονάδες 5

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x - 3}$.

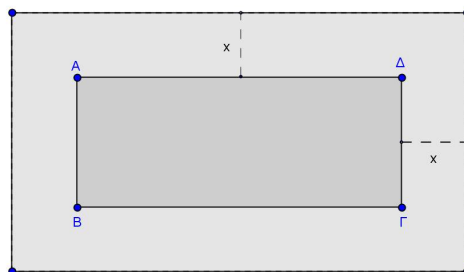
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

267. **ΘΕΜΑ 12911**

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις 15m και 25m.

Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, x > 0.$$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό

$$E = 200\text{m}^2.$$

Μονάδες 7

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει

εμβαδόν μικρότερο από 500m^2 ;

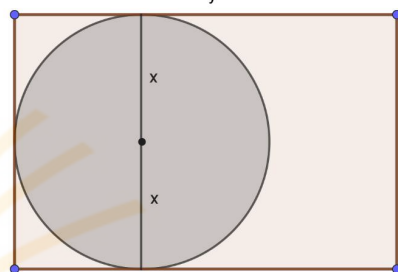
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

268. **ΘΕΜΑ 14122**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm.

Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του

ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x, x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2)

$$\text{δίνεται από τη σχέση } E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } E = 10x - (\pi + 4)x^2, x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

Μονάδες 6

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

Μονάδες 6

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Μονάδες 3

269. **ΘΕΜΑ 14562**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$, για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 8

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

Μονάδες 10

270. ΘΕΜΑ 14629

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο } E(x) = \frac{4}{3} \cdot (x - 25).$$

Μονάδες 7

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε; **Μονάδες 4**

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50; **Μονάδες 8**

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί; **Μονάδες 6**

271. ΘΕΜΑ 14655

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot (10x - x^2), \text{ με } x \in (0, 10).$$

Μονάδες 8

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$. **Μονάδες 7**

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; **Μονάδες 6**

γ) Αν $x = 5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του; **Μονάδες 4**

272. ΘΕΜΑ 14702

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x . **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μην ξεπερνά τα 8 μέτρα. **Μονάδες 7**

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο. **Μονάδες 10**

273. ΘΕΜΑ 32753

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα : $y = 0,43x - 26$

Άνδρας : $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα.

Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

Μονάδες 8

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm.

Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

Μονάδες 9

274. ΘΕΜΑ 34184

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y , τέτοια ώστε $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 10x)$, $x \in (0, 10)$.

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$.

Μονάδες 8

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

Μονάδες 8

275. ΘΕΜΑ 36680

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 7

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 8

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια

αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

Μονάδες 5 + 5 = 10

276. ΘΕΜΑ 34317

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται

(σε ευρώ) από τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε και δεν είχε καταναλώσει νερό.

Μονάδες 2

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

Μονάδες 3

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

Μονάδες 5

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο

$g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$. Ένας κάτοικος της πόλης Α και

ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά

νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε

μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β, να

αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε

περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

Μονάδες 15

277. ΘΕΜΑ 36654

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;

Μονάδες 6

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

Μονάδες 6

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

278. ΘΕΜΑ 36679

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

Μονάδες 9

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

Μονάδες 10

279. ΘΕΜΑ 36668

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π_1 και Π_2 :

Π_1 : Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π_2 : Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η $K = \frac{F - 32}{1,8} + 273$.

Μονάδες 7

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

Μονάδες 10

§6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΘΕΜΑ 2^ο

280. ΘΕΜΑ 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 7

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1, -2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 8

281. ΘΕΜΑ 12686

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

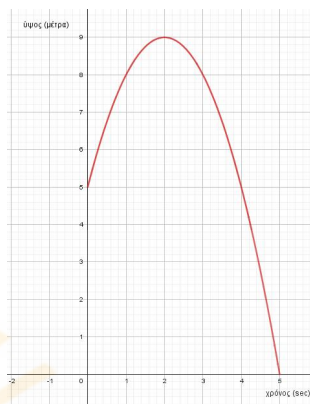
Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Μονάδες 8

282. ΘΕΜΑ 12729

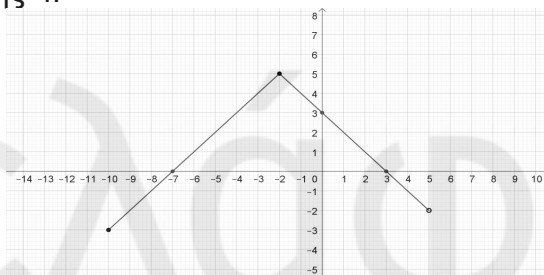
Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



- α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή; **Μονάδες 6**
- β) Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; **Μονάδες 6**
- γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος. **Μονάδες 7**
- δ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος. **Μονάδες 6**

283. ΘΕΜΑ 12910

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της f (A). **Μονάδες 8**
- β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$. **Μονάδες 6**
- γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$. **Μονάδες 4**
- δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$. **Μονάδες 7**

284. ΘΕΜΑ 12913

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$. **Μονάδες 8**
- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .
 - Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$, για κάθε $x \in A$.
 - Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f . **Μονάδες 5+4+8**

285. ΘΕΜΑ 13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . **Μονάδες 8**
β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$. **Μονάδες 9**
γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα; **Μονάδες 8**

286. ΘΕΜΑ 14072

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . **Μονάδες 8**
β) Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; **Μονάδες 8**
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. **Μονάδες 9**

287. ΘΕΜΑ 14306

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **Μονάδες 10**
β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$. **Μονάδες 7**
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . **Μονάδες 8**

288. ΘΕΜΑ 14596

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$, με $x \neq -1$.

- α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$. **Μονάδες 13**
β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$. **Μονάδες 12**

289. ΘΕΜΑ 14603

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. **Μονάδες 6**
β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 10**
γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα. **Μονάδες 9**

290. ΘΕΜΑ 14628

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

Μονάδες 7

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .

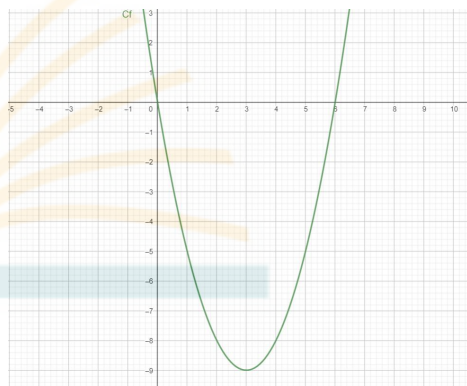
Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

Μονάδες 10

291. ΘΕΜΑ 15000

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Με τη βοήθεια του σχήματος:



α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

Μονάδες 8

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 6

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$f(x) < 0$.

Μονάδες 11

292. ΘΕΜΑ 34159

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 9

293. ΘΕΜΑ 35413

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

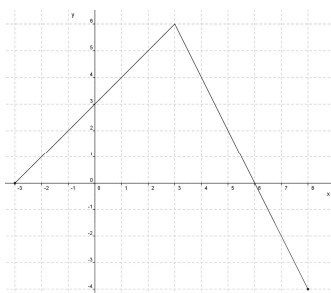
Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της

συνάρτησης f .

Μονάδες 12

294. **ΘΕΜΑ 35034**



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **Μονάδες 6**

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. **Μονάδες 6**

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. **Μονάδες 7**

295. **ΘΕΜΑ 36885**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 5**

β) i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$. **Μονάδες 6+6**

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. **Μονάδες 8**

296. **ΘΕΜΑ 36889**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$. **Μονάδες 10**

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3^ο

297. **ΘΕΜΑ 14604**

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. **Μονάδες 6**

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. **Μονάδες 6**

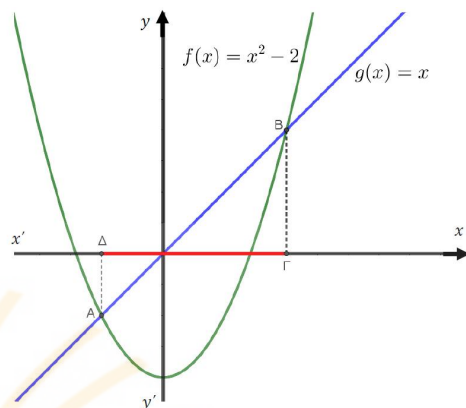
γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 6**

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$. **Μονάδες 7**

298. ΘΕΜΑ 14673

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι A (-1, 1) και B (2, 2). **Μονάδες 9**
- β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$. **Μονάδες 8**
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$. **Μονάδες 8**



299. ΘΕΜΑ 14752

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. **Μονάδες 10**
- β) Να δείξετε ότι το σημείο M (1, $-\sqrt{2}$) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **Μονάδες 5**
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$. **Μονάδες 10**

300. ΘΕΜΑ 14754

- α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. **Μονάδες 4**
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$, για κάθε $x \in A$. **Μονάδες 6**
- δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x) = 6x$.

Μονάδες 8

301. ΘΕΜΑ 37190

- α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

Μονάδες 13

- β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - x + 3 \quad \text{έχουν ένα μόνο κοινό σημείο,}$$

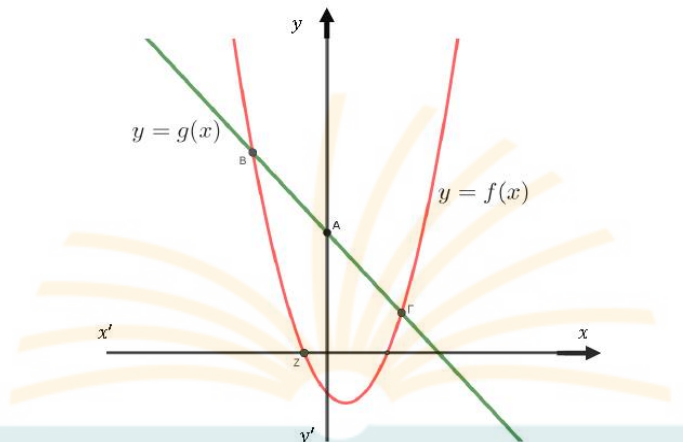
το A (1, 3).

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4^ο

302. **ΘΕΜΑ 12628**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της $y = g(x)$.

Μονάδες 6

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

Μονάδες 9

303. **ΘΕΜΑ 12788**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

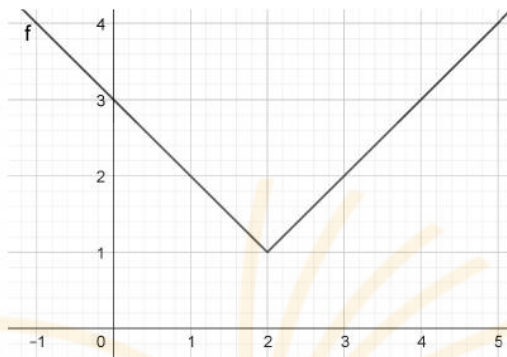
Μονάδες 9

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$, ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$

Μονάδες 9

304. **ΘΕΜΑ 12914**

Έστω η ευθεία $\varepsilon : y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

Μονάδες 4

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α) i).

Μονάδες 5

- β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

Μονάδες 8

- γ) i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

Μονάδες 4

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ) i).

Μονάδες 4

305. **ΘΕΜΑ 12941**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

Μονάδες 6

- β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

Μονάδες 5

- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

Μονάδες 6

- δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 8

306. ΘΕΜΑ 12944

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right).$$

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$, για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$.

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

Μονάδες 10

307. ΘΕΜΑ 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 10

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

Μονάδες 7

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

Μονάδες 8

308. ΘΕΜΑ 13168

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$, με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$,

Μονάδες 5

ii. η γραφική παράσταση της f δεν είναι

κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

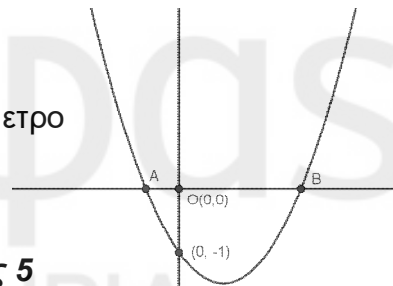
Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

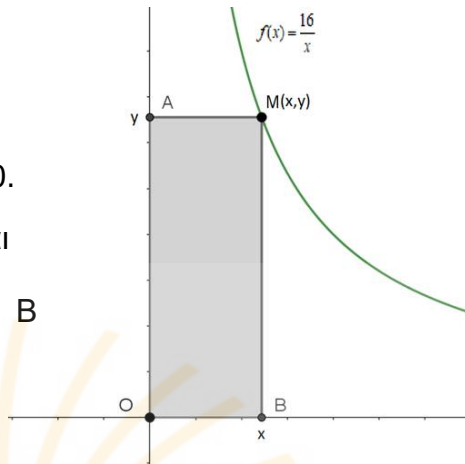
Μονάδες 6



309. ΘΕΜΑ 13090

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περιμέτρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, όπου x η τετμημένη του M . **Μονάδες 8**

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους. **Μονάδες 7**

- γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f , ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε:

- i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4. **Μονάδες 4**
 ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$, για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 6**

310. ΘΕΜΑ 13313

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο A ορισμού της f . **Μονάδες 6**

- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. **Μονάδες 6**

- γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, για κάθε $x \in A$. **Μονάδες 6**

- δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A . **Μονάδες 7**

311. ΘΕΜΑ 13120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Για $\lambda \neq 0$, να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 7

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

312. ΘΕΜΑ 13454

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

Μονάδες 6

β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

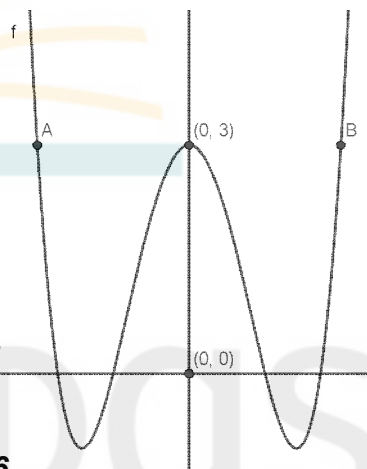
Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6



313. ΘΕΜΑ 13479

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

Μονάδες 9

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$:

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

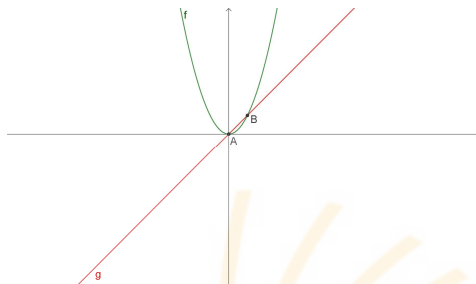
Μονάδες 8

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

Μονάδες 8

314. ΘΕΜΑ 13557

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B. **Μονάδες 7**

β) Αν $A(0, 0)$ και $B(1, 1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . **Μονάδες 5**

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. **Μονάδες 7**

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με

$\beta \neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$. **Μονάδες 6**

315. ΘΕΜΑ 14307

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$.

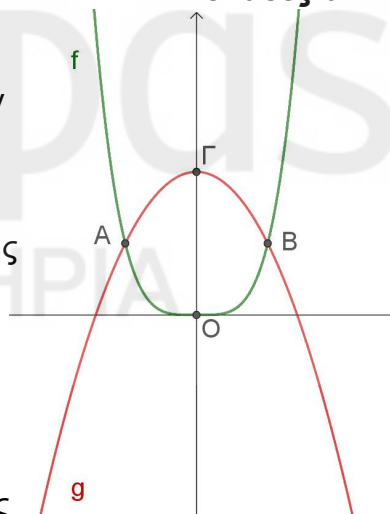
Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g , ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ. **Μονάδες 9**

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $\Gamma(0, 2)$:

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . **Μονάδες 6**

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β). **Μονάδες 10**



316. ΘΕΜΑ 14185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 4

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

Μονάδες 8

317. ΘΕΜΑ 14190

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2} \cdot (\beta + 1)]^2$.

Μονάδες 9

318. ΘΕΜΑ 14225

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 5x + 4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in A$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

Μονάδες 6

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 7

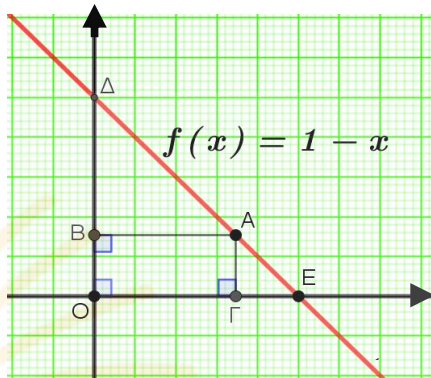
319. **ΘΕΜΑ 14744**

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πότε ισχύει το ίσον;

Μονάδες 8

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A, με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και E. Φέρνουμε από το A κάθετους στους άξονες και έστω B και Γ τα σημεία τομής με y' και x' αντίστοιχα.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ABOΓ.

Μονάδες 10

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ABOΓ είναι $\frac{1}{4}$.

Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

Μονάδες 7

320. **ΘΕΜΑ 14745**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση

$$-2 \leq g(x) \leq 0.$$

Μονάδες 6

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

Μονάδες 7

γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων

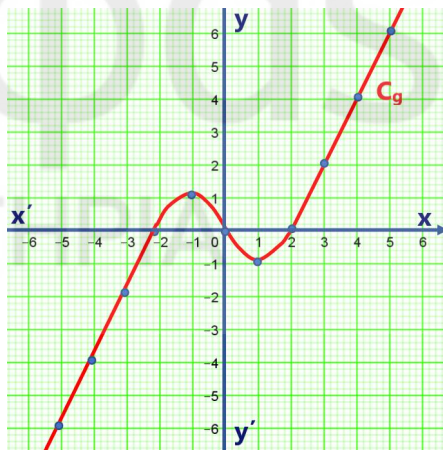
$$\text{των εξισώσεων } g(x) = \frac{4}{5} \text{ και}$$

$$g(x) = -1.$$

Μονάδες 6

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .

Μονάδες 6



321. ΘΕΜΑ 14459

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x

$$\text{ισχύει } |x \cdot f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 10

322. ΘΕΜΑ 14665

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A, B.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

Μονάδες 8

Έστω A (0, 0), B (1, 1).

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

Μονάδες 6

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

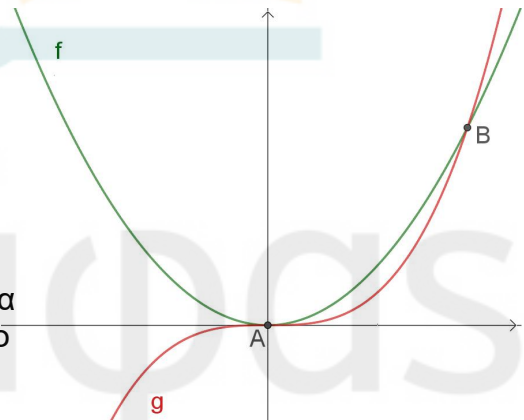
δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$.

Μονάδες 3

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

Μονάδες 3



323. ΘΕΜΑ 14760

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . **Μονάδες 8**

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού

της.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες. **Μονάδες 8**

324. ΘΕΜΑ 14763

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4}$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$. **Μονάδες 7**

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$. **Μονάδες 7**

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f . **Μονάδες 5**

iii. Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

Μονάδες 6

325. ΘΕΜΑ 14810

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. **Μονάδες 6**

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$ **Μονάδες 6**

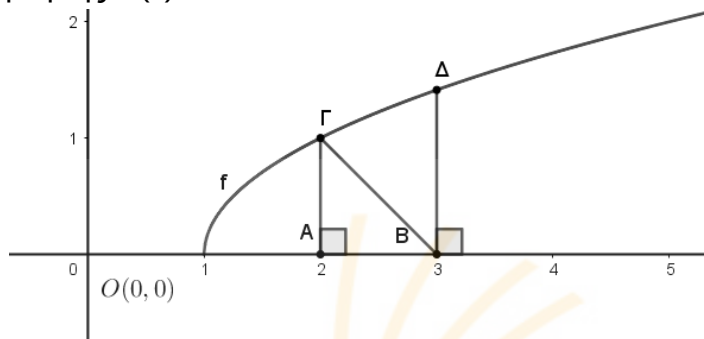
ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη

$x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

326. ΘΕΜΑ 14771

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x - \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.



- α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$. **Μονάδες 6**
 β) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 5**
 γ) i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2, 1)$ και $(3, \sqrt{2})$ αντίστοιχα. **Μονάδες 5**
 ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$. **Μονάδες 4**
 iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 5**

327. ΘΕΜΑ 14786

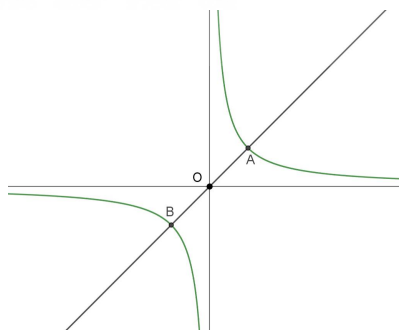
Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ . **Μονάδες 7**
 β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ . **Μονάδες 6**
 γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$
 i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B . **Μονάδες 7**
 ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων. **Μονάδες 5**

328. ΘΕΜΑ 14925

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0, 0)$ είναι το μέσο του AB .



Μονάδες 9

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 8

γ) Αν $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $M'(-x, -y)$, να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$.

Μονάδες 8

329. ΘΕΜΑ 14926

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$.

Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

Μονάδες 10

β) Αν $A(-1, 1)$ και $B(1, 1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι: $f(x) < g(x)$.

Μονάδες 6

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

Μονάδες 9

330. ΘΕΜΑ 14961

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.

Αν $A(\omega, 0)$, $B(\varphi, 0)$

α) Να δείξετε ότι:

i. $\omega + \varphi = 1$.

Μονάδες 4

ii. $\omega \cdot \varphi = -1$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

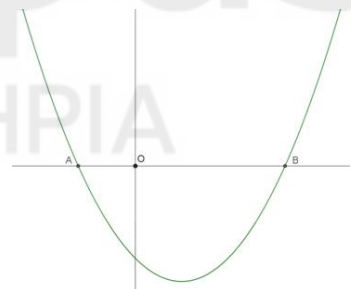
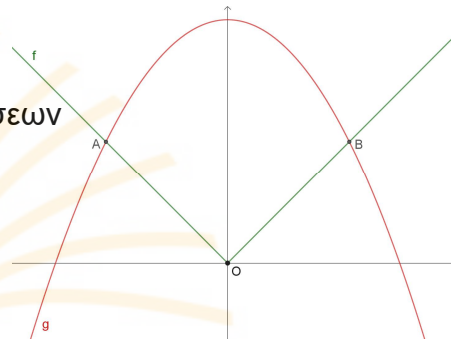
Μονάδες 6

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \varphi$.

δ) Να δείξετε ότι $\varphi < \frac{5}{3}$.

Μονάδες 6

Μονάδες 5



331. ΘΕΜΑ 16153

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες x' και y' .

Μονάδες 7

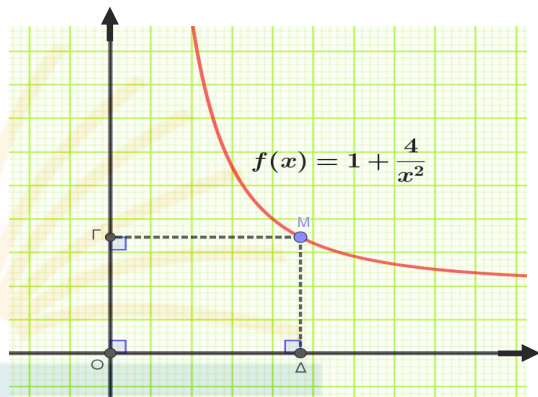
γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΓΜΔ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

Μονάδες 7

ii. $E \geq 4$.

Μονάδες 6



332. ΘΕΜΑ 32742

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$.

Μονάδες 6

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

Μονάδες 6

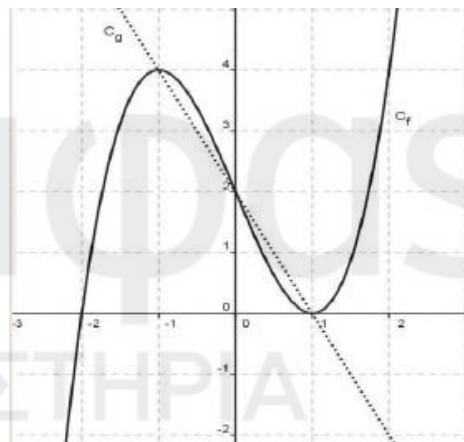
γ) τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

Μονάδες 6

δ) τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση

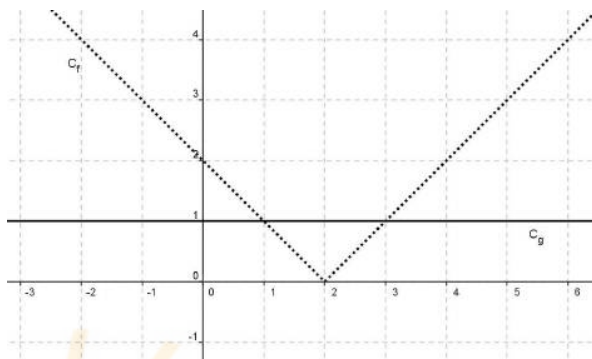
$A = \sqrt{f(x) + 2x + 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 7



333. ΘΕΜΑ 33597

Στο παρακάτω σχήμα,
δίνονται οι γραφικές
παραστάσεις C_f και C_g
των συναρτήσεων f και
 g αντίστοιχα, με
 $f(x) = |x - 2|$ και
 $g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα
σημεία τομής των
 C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι
κάτω από τη C_g . **Μονάδες 10**

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο
προηγούμενο ερώτημα. **Μονάδες 10**

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού
αριθμού η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$. **Μονάδες 5**

334. ΘΕΜΑ 33701

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και
 $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση
της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. **Μονάδες 9**

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της
συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. **Μονάδες 4**

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των
συναρτήσεων f και g . **Μονάδες 12**

335. ΘΕΜΑ 33895

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 5**

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$ για κάθε x που ανήκει στο
πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 8**

γ) Να βρεθεί η τιμή του α , αν η γραφική παράσταση της f
διέρχεται από το σημείο $(-1, 1)$. **Μονάδες 7**

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής
παραστάσης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. **Μονάδες 5**

336. ΘΕΜΑ 33754

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km; **Μονάδες 5**

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; **Μονάδες 5**

γ) Μία άλλη εταιρεία Β χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

Μονάδες 10

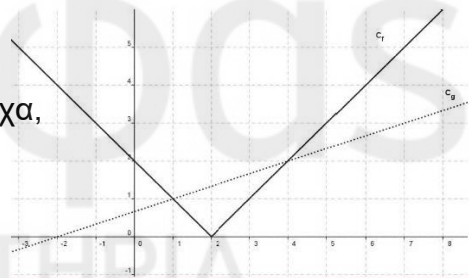
δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

Μονάδες 5

337. ΘΕΜΑ 34312

Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g . **Μονάδες 6**

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα (α). **Μονάδες 8**

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

Μονάδες 6

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$K(x) = \sqrt{3 \cdot |2 - x| - (x + 2)}.$$

Μονάδες 5

338. ΘΕΜΑ 34309

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . **Μονάδες 5**
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία. **Μονάδες 10**
- γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. **Μονάδες 10**

339. ΘΕΜΑ 35385

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο

$$M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right).$$

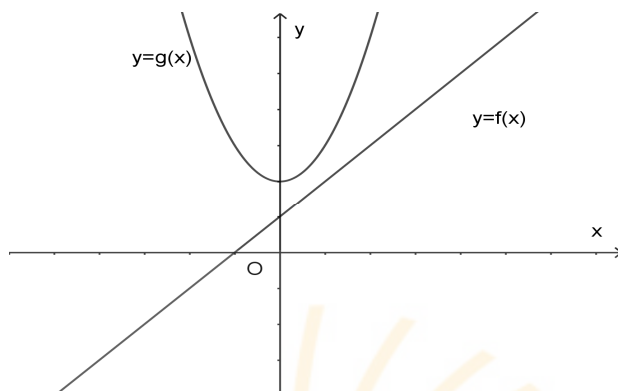
- α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$. **Μονάδες 6**
- β) Για $\beta = -1$:
- i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$. **Μονάδες 5**
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. **Μονάδες 7**
- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

340. ΘΕΜΑ 35409

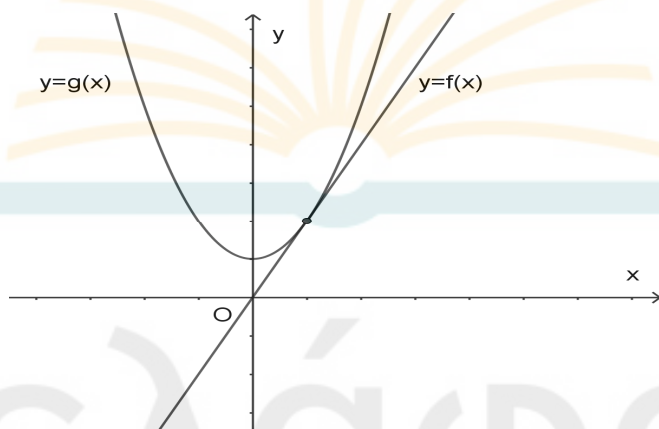
Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$. **Μονάδες 5**
- β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda x - \lambda + 2$ και $g(x) = x^2 - \lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$. **Μονάδες 5**
- ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ . Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

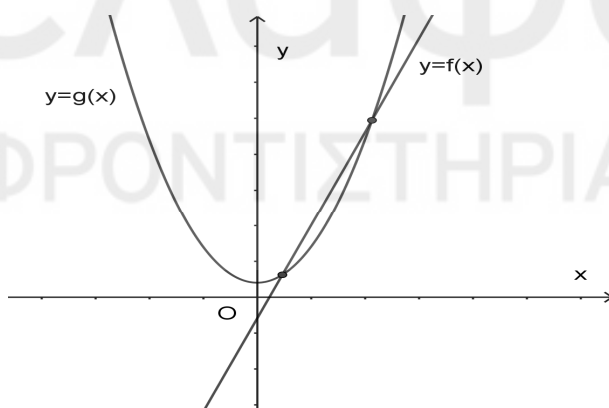
Μονάδες 15



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

341. **ΘΕΜΑ 35410**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

Μονάδες 5

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$.

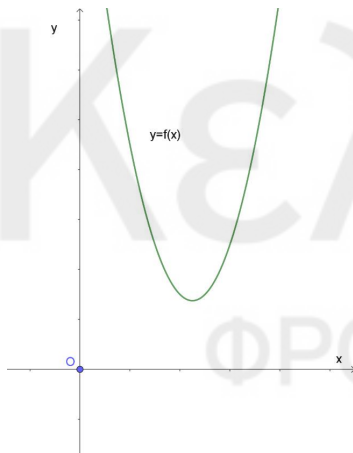
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

- i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

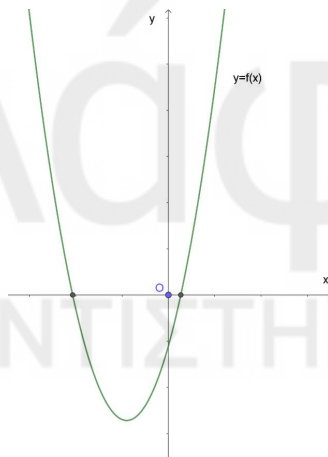
Μονάδες 10

- ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

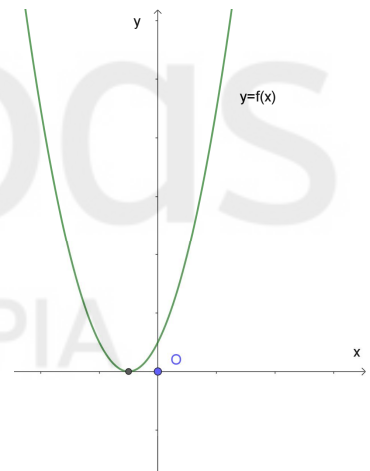
Μονάδες 10



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

342. ΘΕΜΑ 36657

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Μονάδες 8

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; **Μονάδες 8**

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

Μονάδες 9

343. ΘΕΜΑ 36676

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$, με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Μονάδες 7

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 4

ii) Για την τιμή του a που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

Μονάδες 10

344. ΘΕΜΑ 36681

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

Μονάδες 3

β) Για $\lambda = -1$ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

Μονάδες 8

δ) Για $\lambda = 1$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

345. ΘΕΜΑ 36682

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. **Μονάδες 5**
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. **Μονάδες 10**
- γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. **Μονάδες 10**

346. ΘΕΜΑ 36684

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . **Μονάδες 5**
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g . **Μονάδες 10**
- γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha, \alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f . **Μονάδες 10**

347. ΘΕΜΑ 37206

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. **Μονάδες 10**
- β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:
- i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία,
- ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία. **Μονάδες 15**

§6.3 Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

ΘΕΜΑ 2°

348. ΘΕΜΑ 12630

Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των a και β .

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 8

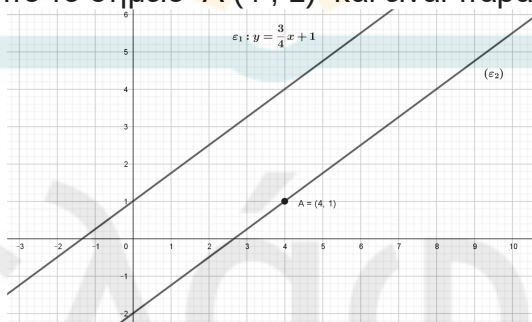
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

Μονάδες 9

349. ΘΕΜΑ 12631

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ϵ_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ϵ_2) που

διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1) .



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ϵ_2) .

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) .

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ_2) με τους άξονες.

Μονάδες 9

350. ΘΕΜΑ 12684

Η ευθεία (ϵ_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ϵ_2)

διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1) .

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ϵ_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ϵ_2) με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

Μονάδες 9

351. ΘΕΜΑ 12730

Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.

Μονάδες 13

- β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

Μονάδες 12

352. ΘΕΜΑ 12856

Δίνεται ευθεία $\varepsilon : y = ax + 5$. Αν η ευθεία $\delta : y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

- α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . **Μονάδες 6**
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$; **Μονάδες 7**

- β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. **Μονάδες 12**

353. ΘΕΜΑ 12939

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1 : y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β .

Μονάδες 13

- β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Μονάδες 6

354. ΘΕΜΑ 13033

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = -\frac{1}{2}x + 4$.

- α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .

Μονάδες 4

- ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

Μονάδες 4

- β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε) .

Μονάδες 9

- γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε) .

Μονάδες 8

355. ΘΕΜΑ 13054

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ευθειών,

Μονάδες 6

ii. το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 13

356. ΘΕΜΑ 13178

Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.

Μονάδες 9

β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .

Μονάδες 8

357. ΘΕΜΑ 13318

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = -x + \sqrt{2}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), [f(-\sqrt{2})]^2$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 13

358. ΘΕΜΑ 13400

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

Μονάδες 9

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

Μονάδες 7

359. ΘΕΜΑ 13471

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 11

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία.

Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες 14

360. ΘΕΜΑ 14575

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 8

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

361. ΘΕΜΑ 14641

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

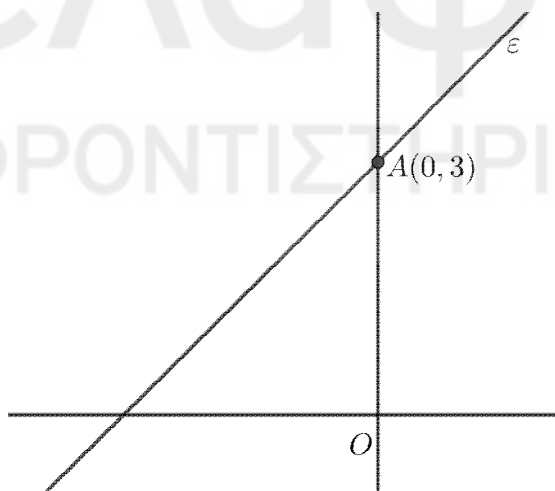
Μονάδες 7

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε .

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.
(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)

Μονάδες 9



362. ΘΕΜΑ 21239

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

Μονάδες 12

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

Μονάδες 13

363. ΘΕΜΑ 35201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$ να βρείτε τις τιμές των α, β .

Μονάδες 13

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 12

364. ΘΕΜΑ 37183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 7

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

365. ΘΕΜΑ 14576

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 10

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x > 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4°

366. ΘΕΜΑ 12681

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$, με $x \in \mathbb{R}$.

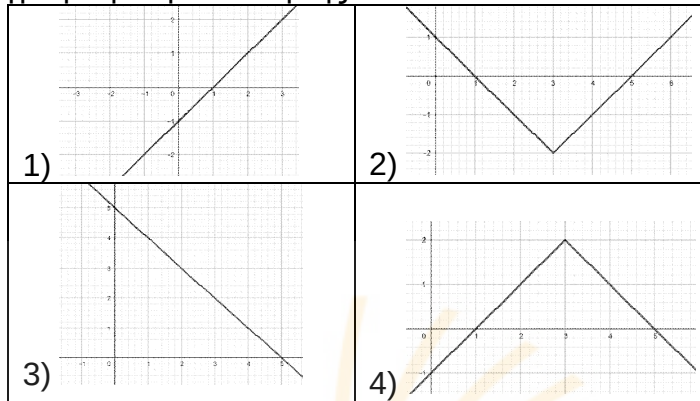
α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$.

Μονάδες 5

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το

σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



Μονάδες 9

γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x - 3| > -1$.

Μονάδες 5

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 6

367. **ΘΕΜΑ 12689**

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

Μονάδες 6

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5° μέχρι το 10° λεπτό της κίνησής του;

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτήρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

Μονάδες 6

δ) i) Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii) Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

Μονάδες 4+4

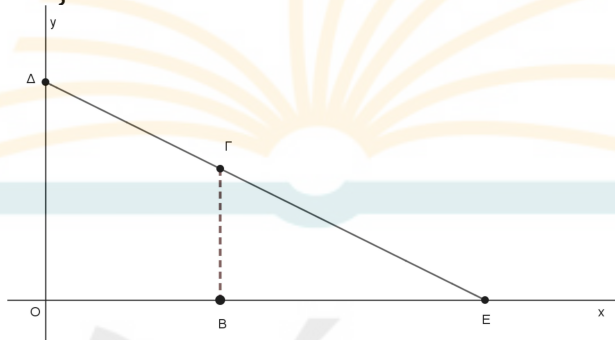
368. ΘΕΜΑ 12682

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **Μονάδες 8**
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **Μονάδες 9**
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. **Μονάδες 8**

369. ΘΕΜΑ 12728

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E, Δ .

Μονάδες 6

Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

- β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$.

Μονάδες 6

- γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το

εμβαδόν του τραpezίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

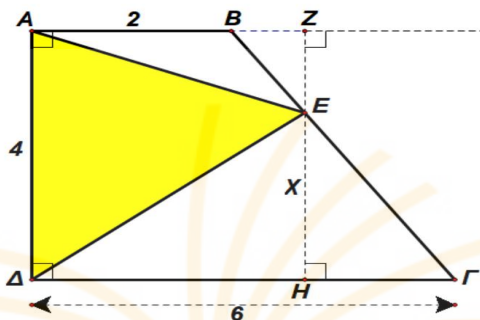
Μονάδες 7

- δ) Αν το εμβαδόν του τραpezίου ισούται με 9,75 τ.μ., να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

Μονάδες 6

370. **ΘΕΜΑ 12834**

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ, ώστε $AB = 2$, $AD = 4$, $ΓΔ = 6$, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από τη ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; **Μονάδες 10**

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. **Μονάδες 7**

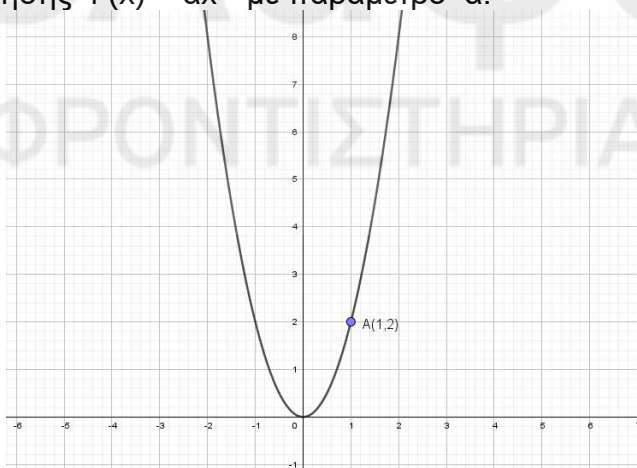
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right).$$

Μονάδες 8

371. **ΘΕΜΑ 12942**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ με παράμετρο a .



α) Αν το σημείο Α (1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$. **Μονάδες 6**

- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$. **Μονάδες 4**
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε. **Μονάδες 4**
- γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$. **Μονάδες 4**
- ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος. **Μονάδες 7**

372. ΘΕΜΑ 12999

Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + \alpha t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

- α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

Μονάδες 6

- β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec , ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2 m/sec . Οι παρακάτω ευθείες (I), (II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

- i. Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;

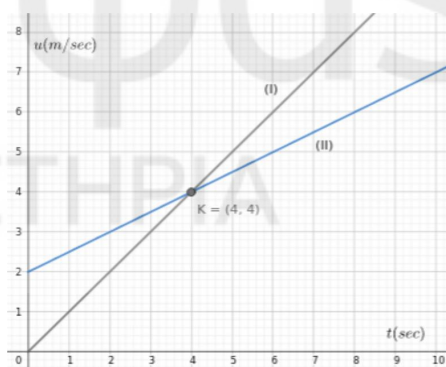
Μονάδες 6

- ii. Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t \text{ sec}$, $t \in (3, 5)$.

Μονάδες 7

- iii. Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

Μονάδες 6



373. ΘΕΜΑ 12921

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|x| - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**
- β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ . **Μονάδες 8**
- γ) Για $\kappa = -3$, να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f . **Μονάδες 5**
- δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB). **Μονάδες 7**

374. ΘΕΜΑ 13055

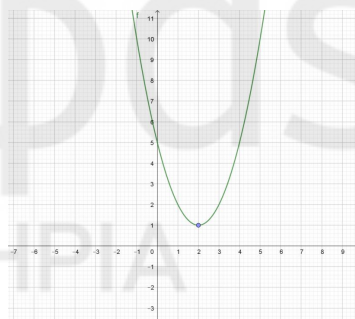
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$. **Μονάδες 6**
- β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$. **Μονάδες 6**
- γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$. **Μονάδες 6**
- δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία. **Μονάδες 7**

375. ΘΕΜΑ 13091

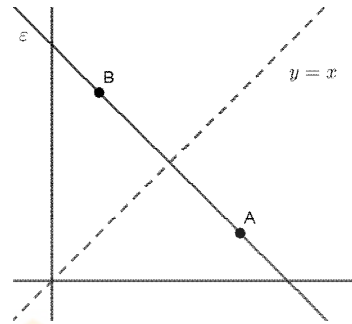
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

- α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας. **Μονάδες 6**
- β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 6**
- ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i. **Μονάδες 7**
- γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$. **Μονάδες 6**



376. ΘΕΜΑ 13298

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες το σημείου B.

Μονάδες 3

- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

- γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

- i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

Μονάδες 8

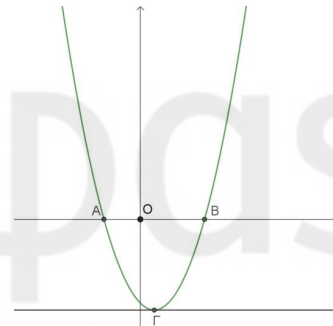
- ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

Μονάδες 8

377. ΘΕΜΑ 13314

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3, x \in \mathbb{R}$.

Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της, όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



- α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Μονάδες 6

- β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

Μονάδες 6

- γ) Να δείξετε ότι $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Μονάδες 6

- δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

Μονάδες 7

378. ΘΕΜΑ 13367

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 9

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

Μονάδες 6

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

Μονάδες 5

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

Μονάδες 5

379. ΘΕΜΑ 13473

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι $A = 2$.

Μονάδες 4

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$.

Μονάδες 5

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3 - x$ και

$g(x) = x - 1$, για $1 \leq x \leq 3$.

Μονάδες 6

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)| = 2$.

Μονάδες 4

380. ΘΕΜΑ 14184

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(x+2) \cdot (x+1)^2}{1 + (x+2) \cdot x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 4

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 8

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

Μονάδες 7

ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

Μονάδες 6

381. ΘΕΜΑ 14320

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0, 6] \\ 16, & x \in (6, 9] \\ 25 - x, & x \in (9, 12] \end{cases} \quad \text{και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.}$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. **Μονάδες 6**

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:
i. διατηρείται σταθερή, **Μονάδες 4**
ii. είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου. **Μονάδες 7**

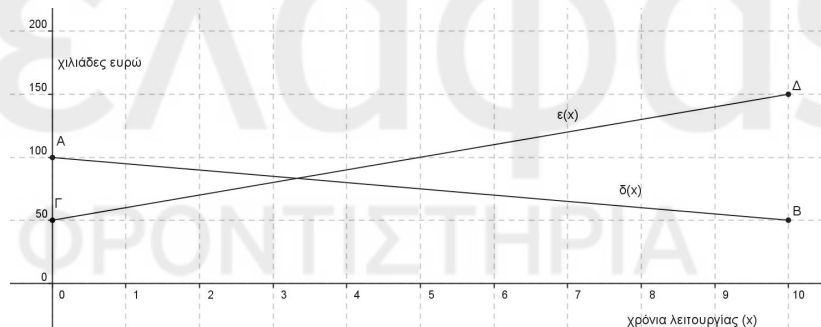
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **Μονάδες 8**

382. ΘΕΜΑ 14477

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. **Μονάδες 4**

β) i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. **Μονάδες 15**

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. **Μονάδες 6**

383. ΘΕΜΑ 14556

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες $x'x$, $y'y$ είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$.

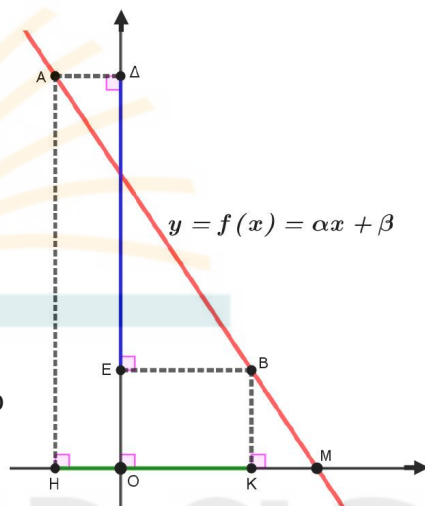
Μονάδες 9

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

Μονάδες 7

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9



384. ΘΕΜΑ 33894

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.

Μονάδες 7

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 6

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

Μονάδες 7

385. ΘΕΜΑ 34183

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα RED χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα YELLOW χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

- α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία RED για μια διαδρομή x χλμ. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

Μονάδες 3

- ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία YELLOW για μια διαδρομή x χλμ. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

Μονάδες 3

- β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

Μονάδες 8

- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας RED είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 8

- δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία RED και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B , να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B .

Μονάδες 3

386. ΘΕΜΑ 36652

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 6

- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

Μονάδες 4

- γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα $x'x$ που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 8

- δ) Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

387. ΘΕΜΑ 36655

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Μονάδες 7

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

Μονάδες 8

388. ΘΕΜΑ 36659

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

Μονάδες 5

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για

να κάψει 360 θερμίδες είναι $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

Μονάδες 4

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

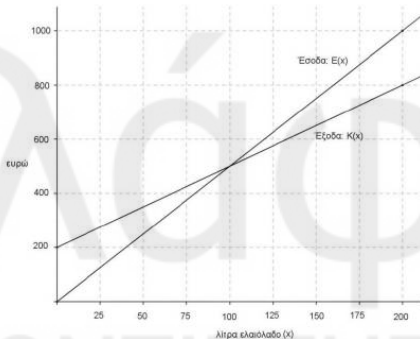
Μονάδες 9

389. ΘΕΜΑ 36683

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$. **Μονάδες 3**
- β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. **Μονάδες 5**
- ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 4**
- γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**
- ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. **Μονάδες 8**

390. ΘΕΜΑ 37203



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

- α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. **Μονάδες 6**
- β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; **Μονάδες 5**
- γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά; **Μονάδες 6**
- δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). **Μονάδες 8**